Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Grundlagen der Mathematik I (Analysis A)

Übungsnotizen – Valentin Schoppe

Version vom 1. Dezember 2025

Herbstsemester 2025

Dieses Skript ist im Rahmen einer Übungsstunde über Analysis A (D-CHAB) im Herbstsemester 2025 an der ETH Zürich entstanden. Es ist an die Vorlesung von Dr. Geldhauser im HS2025 sowie die Mitschriften von Dr. Kobel-Keller angelehnt und soll in kurzer und übersichtlicher Art und Weise den Kern der Analysis A (D-CHAB) Vorlesung an der ETH wiedergeben. Fehler in der Formulierung und der Darstellung sowie Tippfehler sind möglich und Verbesserungen und Korrekturen sind herzlich willkommen. Es ist wichtig zu betonen, dass dieses Skript keinesfalls vollständig ist, sondern als Leitfaden für die Übungsstunde und die spätere Prüfungsvorbereitung dienen soll. Es werden nur die wichtigsten Definitionen und Sätze erwähnt.

Viel Erfolg bei der Prüfungsvorbereitung!

Zürich, 1. Dezember 2025

Valentin Schoppe

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Logik

Eine mathematische Aussage A ist entweder wahr *oder* falsch. Durch **Negation** $\neg$ erhalten wir $\neg A$ aus einer wahren Aussage eine falsche und andersherum.

Beispiel 1.1.1 (Negation)
Sei A die Aussage: „Es hat geregnet", dann ist $\neg A$ die Aussage: „Es hat nicht geregnet".
Sei A die Aussage $3 + 2 = 5$, dann ist $\neg A$ die Aussage: $3 + 2 \neq 5$.

Damit wir Aussagen nicht nur *metamathematisch* formulieren müssen führen wir eine Formelsprache ein. Es gibt die logischen Symbole $\wedge$ „und", $\vee$ „(inklusives) oder", $\implies$ „impliziert", $\iff$ „genau dann wenn" oder auch „äquivalent zu".

Definition 1.1.2 (Logische Symbole)
Eine Aussage $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn A und B wahr sind.
Eine Aussage $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn A, B, oder beide wahr sind.
Eine Implikation $A \implies B$ ist genau dann wahr, wenn A falsch oder B wahr ist und kann dargestellt werden als $(\neg A) \vee B$. Die Äquivalenz $A \iff B$ ist genau dann wahr, wenn A und B den gleichen Wahrheitsgehalt haben und kann dargestellt werden als $(A \implies B) \wedge (B \implies A)$.

Beispiel 1.1.3 (Exklusives Oder)
Mit diesen Symbolen können wir jetzt kompliziertere Aussagen basteln. Zum Beispiel die Aussage $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$. Dies ist das „exklusive oder", resp. „entweder A oder B".

Beispiel 1.1.4 (Kontraposition)
Haben wir eine Implikation $A \implies B$, so nennen wir die äquivalente Aussage $\neg B \implies \neg A$ die Kontraposition.

Definition 1.1.5 (Quantoren)
Sei $A(x)$ eine Aussage, die von x abhängt. Dann heisst $\forall x : A(x)$, mit dem Allquantor $\forall$, dass A für alle x erfüllt ist, also immer wahr ist, egal welches x man einsetzt. Die Aussage $\exists x : A(x)$, mit dem Existenzquantor $\exists$, bedeutet, dass ein x existiert, für das die Aussage $A(x)$ wahr wird. Im Allgemeinen kann es auch mehrere x geben, schreiben wir aber $\exists!$, so darf es nur genau ein x geben.

Beispiel 1.1.6 (Quantoren)
Wir betrachten die Aussage: $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$. Wörtlich bedeutet sie, dass für alle positiven reellen Zahlen x existiert eine reelle Zahl y, sodass $y^2 = x$. Also hat jede positive reelle Zahl eine Quadratwurzel. Diese Aussage ist wahr.

Bemerkung 1.1.7 (Quantoren lassen sich nicht vertauschen)
Achtung: im Allgemeinen können wir Quantoren nicht vertauschen. Die Aussage $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^+ : y^2 = x$ ist nicht dieselbe! Sie bedeutet, dass eine reelle Zahl y existiert, die die Quadratwurzel von allen positiven reellen Zahlen x ist. Das stimmt natürlich nicht.

Satz 1.1.8 (Negation von Quantoren)
Ein Allquantor wird zum Existenzquantor und ein Existenzquantor zum Allquantor. Die auf den Quantor folgende Aussage wird negiert.

$$\neg\forall x : A(x) \iff \exists x : \neg A(x)$$
$$\neg\exists x : A(x) \iff \forall x : \neg A(x)$$

Beispiel 1.1.9 (Negation und Quantoren)
Wir negieren die vorherige Aussage $\forall x \in \mathbb{R}^+\ \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$.

Lösung: Rein nach der genannten Regel sollte es sein: $\exists x \in \mathbb{R}^+\ \forall y \in \mathbb{R} : y^2 \neq x$. Das ergibt auch intuitiv Sinn, denn diese Aussage ist nun: Es existiert eine positive reelle Zahl, sodass für alle reellen Zahlen y die Gleichung $y^2 = x$ niemals erfüllt ist. Damit existiert eine positive reelle Zahl x, die keine Quadratwurzel hat. Das ist genau die Negation der Aussage.

Beispiel 1.1.10 (Aussagen in Quantoren schreiben)
Wir möchten die Aussage:

Für jede reelle Zahl existiert eine natürliche Zahl, die grösser als sie ist.

Lösung: Diese Aussage übersetzen wir in Quantoren. Es gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N} : x < N.$$

1.2 Vollständige Induktion

Die **vollständige Induktion** ist ein Beweisprinzip, bei dem eine Aussage für alle natürlichen Zahlen gezeigt wird. Zum Beispiel lässt sich zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bei der vollständigen Induktion wird ein solcher Beweis in zwei Schritten durchgeführt.

- Induktionsverankerung: Die Aussage ist für $n = 0$ wahr.
- Induktionsschritt: Wenn die Aussage für $n = k$ wahr ist, dann ist sie auch für $k + 1$ wahr.

Aus diesen beiden Aussagen folgt nun nach dem Induktionsprinzip, dass die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Wir wissen, dass die Aussage für $n = 0$ gilt (Induktionsverankerung). Weil wir den Induktionsschritt bewiesen haben, wissen wir nun, dass die Aussage auch für $n = 1$ wahr ist. Das können wir jetzt beliebig fortführen und so folgt die Aussage für alle natürlichen Zahlen. Es sei zur Vollständigkeit auch gesagt, dass als Induktionsverankerung nicht immer $n = 0$ gewählt werden muss. Es kann jede beliebige Zahl gewählt werden, ab der man die Aussage zeigen will. Soll die Aussage nur für alle $n \geq 2$ gelten, so kann man den $n = 2$ als den Induktionsanfang wählen.

Beispiel 1.2.1 (Summe der natürlichen Zahlen)
Wir beweisen mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Wir wählen $n = 0$ als unsere *Induktionsverankerung.* Für $n = 0$ gilt

$$0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0.$$

Nun zeigen wir den Induktionsschritt. Sei die Aussage wahr für $n = k$ (*Induktionsannahme*). Es gelte also explizit,

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Betrachten wir also die Summe $1 + 2 + \cdots + k + (k+1)$ so können wir durch die *Induktionsannahme* die Summe schreiben als

$$\underbrace{1 + 2 + \cdots + k}_{=\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1).$$

Nun können wir diesen Ausdruck weiter umformen

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Das entspricht genau der zu beweisenden Aussage für $n = k + 1$. Aus der Annahme, dass die Aussage gilt für $n = k$ folgt, dass die Aussage auch gilt für $k+1$. Damit ist der Induktionsschritt bewiesen. Aus *Induktionsverankerung* und *Induktionschritt* folgt nach vollstäniger Induktion nun, dass die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. □

Beispiel 1.2.2 (Teilbarkeit mittels Induktion)
Wir beweisen mittels vollständiger Induktion die Aussage:

$$n^2 + n \text{ ist gerade für alle } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Beweis. Wir wählen $n = 1$ als unsere *Induktionsverankerung.* Für $n = 1$ gilt

$$1^2 + 1 = 2,$$

und 2 ist eine gerade Zahl.
Nun zeigen wir den Induktionsschritt. Sei die Aussage wahr für $n = k$ (*Induktionsannahme*). Es gelte also explizit,

$$k^2 + k \text{ ist gerade.}$$

Betrachten wir den Ausdruck für $n = k + 1$:

$$(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = \underbrace{(k^2 + k)}_{\text{gerade}} + 2k + 2.$$

Nach der *Induktionsannahme* ist $k^2 + k$ gerade, also lässt es sich als $2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ schreiben. Damit erhalten wir:

$$(k^2 + k) + 2k + 2 = 2m + 2k + 2 = 2(m + k + 1).$$

Dies ist offensichtlich durch 2 teilbar und somit gerade. Damit ist der Induktionsschritt bewiesen. Aus *Induktionsverankerung* und *Induktionschritt* folgt nach vollständiger Induktion, dass die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gilt. $\square$

1.3 Teilmengen der reellen Zahlen

Definition 1.3.1 (Intervall)
Wir definieren das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ als

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

das offene Intervall (a, b) als

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | \; a < x < b\}$$

Es gibt auch Intervalle, die weder offen noch abgeschlossen sind. Man sagt manchmal sie seien „halb-offen". Ein Beispiel ist $[0, 1)$.

Beispiel 1.3.2 (Offene Intervalle)

$$(-2, 1) \qquad (0, 1) \qquad \left(-100, \frac{1}{3}\right) \qquad (-1, 0] \cup [0, 1)$$

Beispiel 1.3.3 (Abgeschlossene Intervalle)

$$[0, 1] \qquad [-1, 1] \qquad \left[-4, \frac{2}{3}\right] \qquad [-1, 1) \cup \{1\}$$

Bemerkung 1.3.4 (Andere Teilmengen)
Es gibt auch Teilmengen der reellen Zahlen, die keine Intervalle sind. Zum Beispiel:

$$(-1, 0] \cup (1, 2) \qquad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+, \ldots \qquad \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Definition 1.3.5 (Beschränkte Menge, Maximum, Minimum)
Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen.

- X ist **von oben beschränkt**, falls eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $x \leq s$ für alle $x \in X$. Eine jede solche Zahl s wird eine **obere Schranke** von X genannt. Eine obere Schranke, die selbst in X enthalten ist, wird **Maximum** genannt.

$$s = \max(X)$$

- **Von unten beschränkt**, **untere Schranke** und **Minimum** sind völlig analog definiert.
- $X \subseteq \mathbb{R}$ ist **beschränkt**, wenn es von oben und unten beschränkt ist.

Beispiel 1.3.6 (Maximum und Minimum)
Wir betrachten das abgeschlossene Intervall $I = [0, 2]$.

Lösung: Dieses Intervall ist beschränkt und es hat ein Maximum und ein Minimum. Es gilt

$$\max(I) = 2 \qquad \min(I) = 0.$$

Bemerkung 1.3.7
Falls für eine Menge ein Maximum (oder Minimum) existiert, dann ist dieses eindeutig! Es gibt in jeder Menge (falls es existiert) nur ein grösstes/kleinstes Element.

Beispiel 1.3.8 (Menge ohne Maximum/Minimum)
Wir untersuchen die Menge $(-1, 0] \cup (1, 2)$ aus dem vorherigen Beispiel auf ein Maximum und Minimum.

Lösung: Die Menge $(-1, 0] \cup (1, 2)$ ist nach oben und unten beschränkt. Obere Schranken sind zum Beispiel $2, 3$ oder 100 und untere Schranken zum Beispiel $-50, -3$ und -1. Es gibt in diesem Beispiel jedoch weder eine obere noch eine untere Schranke, die in der Menge enthalten sind. Die Menge hat damit weder ein Maximum noch ein Minimum.

Beispiel 1.3.9 (Unbeschränkte Teilmengen)
Die Menge der Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist nach oben unbeschränkt, denn es gibt keine grösste Natürliche Zahl. Gleichzeitig hat diese Menge aber ein Minimum, und zwar die 0.

Definition 1.3.10 (Supremum und Infimum)
Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei $A := \{a \in \mathbb{R} | \ x \leq a \ \forall x \in X\}$ die Menge aller oberen Schranken von X. Wenn ein Minimum $s = \min(A)$ existiert, dann nennen wir es **Supremum von** X und schreiben

$$s = \sup(X).$$

Analog können wir die unteren Schranken einer Menge X betrachten $B := \{b \in \mathbb{R} | \ x \geq b \ \forall x \in X\}$. Ein Maximum $i = \max(B)$ in dieser Menge B nennen wir **Infimum** von B und schreiben

$$i = \inf(X).$$

Bemerkung 1.3.11 (Beschränkte Teilmengen)
Das Supremum ist für eine von oben beschränkte Teilmenge immer wohldefiniert, da die Teilmenge der oberen Schranken nicht leer und nach unten abgeschlossen ist. Analoges gilt für nach unten beschränkte Teilmengen und ihr Infimum.

Bemerkung 1.3.12 (Maximum und Supremum resp. Minimum und Infimum)
Falls das Maximum/Minimum in einer Teilmenge X existiert, dann stimmen Maximum/Minimum und Supremum/Infimum **immer** überein.

Beispiel 1.3.13 (Supremum und Infimum)
Wir betrachten erneut die Teilmenge $X = (-1, 0] \cup (1, 2)$ aus Beispiel 1.3.8 und untersuchen auf Maximum/Minimum resp. /Supremum/Infimum.

Lösung: Wir haben gesehen, dass diese Menge beschränkt ist, aber kein Maximum und Minimum existiert. Weil die Menge beschränkt ist existieren aber das Supremum und Infimum. Also eine kleinste obere Schranke und eine grösste untere Schranke. Das sind jeweils -1 und 2. Es gilt

$$\sup(X) = 2 \qquad \inf(X) = -1.$$

Beispiel 1.3.14 (Supremum/Infimum unendlicher Mengen)
Wir suchen das Infimum und Supremum der Menge

$$\left\{\frac{2}{1+n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Lösung: Wir schreiben die ersten paar Terme auf, um ein „Gefühl” für die Menge zu erhalten. Beachte, dass diese Menge kein Intervall ist, sondern eine unendliche Punktmenge.

$$\left\{\frac{2}{1+n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \dots\right\} = \left\{2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \dots\right\}$$

Wir sehen, dass die Menge nach unten beschränkt ist, denn der Ausdruck $\frac{2}{1+n}$ ist für alle natürlichen Zahlen immer positiv. Gleichzeitig ist der Ausdruck nach oben beschränkt, da für den kleinsten möglichen Nenner, also $n = 0$, der Ausdruck den Wert $\frac{2}{1+0} = 2$ annimmt. Wir haben damit also direkt ein Maximum gefunden, denn 2 ist eine obere Schranke, die in der Menge enthalten ist. Weil ein Maximum existiert ist dieses auch direkt das Supremum.

Das Infimum finden wir, indem wir überlegen, wie klein der Bruch maximal werden kann. Wenn wir unser $n \in \mathbb{N}$ beliebig gross werden lassen, kann der Bruch $\frac{2}{1+n}$ beliebig klein (also beliebig nahe Null) werden. Damit ist rein intuitiv gesprochen 0 das Infimum.

Definition 1.3.15 (Kompakte Intervalle)
Ein **abgeschlossenes und beschränktes** Intervall nennen wir **kompakt**.

Beispiel 1.3.16 (Kompakte Intervalle)
Die Intervalle $[0, 1]$, $[-100, 20]$ und $\{2\}$ sind kompakt, aber $[0, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$ und $(-\infty, 0)$ nicht.

Für mehr Details siehe A.1.

Kapitel 2

Komplexe Zahlen

Der Vorteil der komplexen Zahlen im Vergleich zu den reellen Zahlen ist ihre algebraische Abgeschlossenheit. Man sagt $\mathbb{C}$ ist ein algebraisch abgeschlossener Körper, das heisst alle Polynome vom Grad n haben auch n (nicht zwingend verschiedene) Nullstellen. Das ist der Fundamentalsatz der Algebra. In $\mathbb{R}$ gilt das natürlich nicht, denn das Polynom $x^2 + 1$ hat keine reellen Nullstellen, aber eben zwei komplexe!

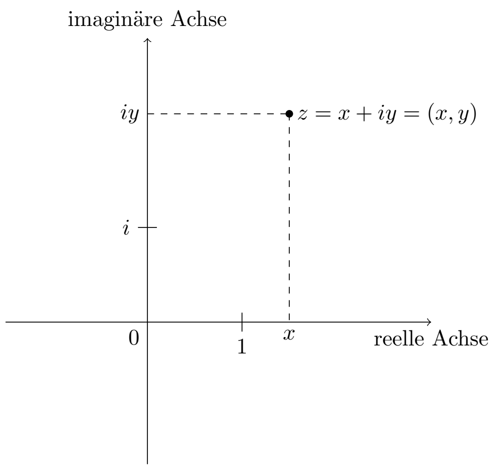
2.1 Definition und die Gausssche Zahlenebene

Definition 2.1.1 (Komplexe Zahlen)
Wir definieren die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als die Menge

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ und } i^2 = -1\}.$$

Eine komplexe Zahl ist ein Element dieser Menge.

Wir können $\mathbb{C}$ mit dem $\mathbb{R}^2$ identifizieren, wobei die zweite Achse durch vielfache von der imaginären Einheit i gegeben sind. Diese entstehende Ebene nennt man **Gausssche Zahlenebene**. Komplexe Zahlen sind dann Punkte in dieser Ebene resp. eine Linearkombination von einem Vielfachen der reellen 1 und der imaginären Einheit i. Eine komplexe Zahl z der Form $z = x + iy$ nennen wir **Normalform** oder **kartesische Form**.



2.1.1 Rechnen mit komplexen Zahlen

Definition 2.1.2 (REAL- UND IMAGINÄRTEIL, KONJUGATION, BETRAG)
Sei $z \in \mathbb{C}$ gegeben als $z = x + iy$. Wir definieren den **Realteil**

$$\mathrm{Re}(z) = x$$

und den **Imaginärteil**

$$\mathrm{Im}(z) = y.$$

Ausserdem definieren wir das komplex Konjugierte $\bar{z}$ als

$$\bar{z} = x - iy,$$

und den Betrag $|z|$ durch

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

In der Gaussschen Zahlenebene ist eine komplexe Zahl z also durch den Punkt $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ gegeben, resp. durch einen Pfeil vom Ursprung zum Punkt $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$. Die Länge dieses Pfeils entspricht $|z|$.

Beispiel 2.1.3 (BETRAG BERECHNEN)
Berechnen Sie den Betrag von Berechnen Sie das Produkt von $z = 2 + 3i$ und $w = 3 + 6i$. .

Lösung: Wir berechnen:

$$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \qquad |w| = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45}.$$

Addition in dieser Zahlenebene funktioniert wie die gewöhnliche „Vektoraddition" im $\mathbb{R}^2$. Man stellt sich $v, w \in \mathbb{C}$ als Pfeile vom Ursprung vor und legt beide Pfeile durch Parallelverschiebung aneinandner. Der resultierende Pfeil ist die Summe. Algebraisch sieht es wiefolgt aus: Seien $v = a+ib$ und $w = c+id$, dann berechnet sich die Summe durch

$$v + w = a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d).$$

Man addiert also Real- und Imaginärteil separat. Die Subtraktion folgt völlig analog.

Beispiel 2.1.4
Berechnen Sie die Summe von $z = 2 + 3i$ und $w = 3 + 6i$.

Lösung: Wir berechnen:

$$z + w = (2 + 3) + (3 + 6)i = 5 + 9i$$

Die Multiplikation und Division zweier komplexer Zahlen lassen sich ähnlich herleiten. Wir betrachten wieder $v, w \in \mathbb{C}$. Es folgt:

$$v \cdot w = (a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc),$$

wobei wir $i^2 = -1$ genutzt haben. Wie sich die Multiplikation graphisch verstehen lässt schauen wir uns in einem späteren Abschnitt an (siehe 2.2).

Beispiel 2.1.5
Berechnen Sie das Produkt von $z = 2 + 3i$ und $w = 3 + 6i$.

Lösung: Wir berechnen:

$$z \cdot w = (2+3i) \cdot (3+6i) = 6 + 9i + 12i - 18 = -12 + 21i.$$

Alternativ kann man auch direkt in die hergeleitete Formel einsetzen. Dafür muss diese aber immer verfügbar, oder gemerkt werden.

Für die Division zweier komplexer Zahlen $v = a + ib$ und $w = c + id$ gilt:

$$\frac{v}{w} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Beispiel 2.1.6
Dividieren Sie $z = 2 + 3i$ durch $w = 3 + 6i$.

Lösung: Wir können wieder entweder explizit berechnen durch erweitern des Bruchs mit $\overline{w}$ oder wir setzen direkt in die Formel ein.

$$\frac{z}{w} = \frac{6+18}{45} + \frac{9-12}{45}\,i = \frac{8}{15} - \frac{1}{15}\,i.$$

Satz 2.1.7 (Eigenschaften komplexer Zahlen)
Es gelten folgende Eigenschaften für komplexe Zahlen.

(i) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

(ii) $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

(iii) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$

(iv) $z \cdot \bar{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$

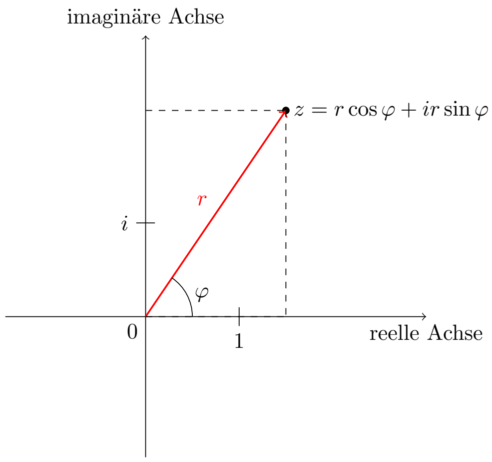
(v) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

Bemerkung 2.1.8 (Übung)
Eine sehr gute Übung für den Anfang ist es diese einfachen Identitäten zu beweisen. Als Beispiel sei hier die erste mal gezeigt. Sei $z = a + ib$. Dann folgt

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{a+ib+a-ib}{2} = \frac{2a}{2} = a = \mathrm{Re}(z).$$

2.2 Polarform und die Eulersche Formel

Einen Pfeil in der Ebene können wir nicht nur durch einen Punkt beschreiben, sondern auch durch einen Winkel φ und eine Länge r vom Ursprung. Der Winkel φ gibt uns die Richtung und die Länge r bis wohin wir den Pfeil malen. Diese Darstellung nennt man **Polarform** einer komplexen Zahl. Man schreibt $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ für die Polarform. Dies folgt ganz einfach aus trigonometrischen Überlegungen. Wir projizieren r durch den Winkel φ auf die reelle und imaginäre Achse und erhalten so die kartesische Darstellung. Eine andere mathematisch sehr schöne Verbindung zwischen der kartesischen Form und der Polarform ist die **Eulersche Formel**.



Den Winkel φ nennen wir **Polarwinkel** oder auch **Argument** von z. Die Länge r ist genau durch den Betrag von z gegeben.

Satz 2.2.1 (EULERSCHE FORMEL)
Sei $z \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt der Zusammenhang

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Für $z = \pi$ folgt die **Eulersche Identität**

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Für mehr Details siehe A.2.1.

Rechenmethode 2.2.2 (KARTESISCHE FORM AUS POLARDARSTELLUNG)
Sei nun $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ eine komplexe Zahl. Mittels der Eulerschen Formel können wir z nun als komplexes Exponential schreiben mittels

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = re^{i\varphi}.$$

Andersherum folgt auch: Sei eine komplexe Zahl $z = re^{i\theta}$ in Polarform gegeben. Wandeln wir diesen Ausdruck mithilfe der Euler-Formel in eine komplexe trigonometrische Linearkombination um, so erhalten wir eine Verbindung mit ihrer algebraischen Form

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

Identifizieren wir eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit einem Pfeil in der komplexen Zahlenebene, so sehen wir, dass die algebraische Form einfach den Projektionen auf die reelle und imaginäre Achse entspricht.

Beispiel 2.2.3 (UMWANDLUNG POLARDARSTELLUNG IN KARTESISCHE FORM)
Wir betrachten die komplexe Zahl $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ und möchten diese in ihre kartesische Form umwandeln.

Lösung: Mithilfe der Eulerschen Formel folgt

$$z = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(\cos(i\pi/4) + i\sin(i\pi/4)) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i.$$

Bemerkung 2.2.4 (MEHRDEUTIGKEIT DES POLARWINKELS)
Beachte, dass $e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+2\pi)}$. Wir wählen φ immer zwischen $(-\pi, \pi]$ und garantieren so Eindeutigkeit des Arguments. Für $z = 0$ ist das Argument nicht definiert. Da aber $|z| = 0$ sein muss, spielt dies keine Rolle.

Rechenmethode 2.2.5 (Kartesische Form in Polarform)
Wir haben eine komplexe Zahl $z = a + ib$ in kartesischer Form gegeben und möchten nun die Polarform finden. Dafür nutzen wir die Eulersche Formel. Wir wissen

$$z = a + ib = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\cos\varphi + ir\sin\varphi.$$

Wir können daher direkt $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ablesen. Ausserdem haben wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases}$$

und möchten dieses nach φ auflösen. Wir können den Bruch

$$\frac{b}{a} = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi$$

betrachten und erhalten so eine Formel für φ. Das alles aber ohne Beachten von Verschiebungen um π, je nachdem in welchem Quadranten unsere Zahl liegt, weil $\tan(x) = \tan(x + \pi)$.

Deshalb unterscheiden wir folgende Fälle:

(i) z liegt im 1. oder 4. Quadranten resp. $a > 0 \implies \varphi = \arctan(b/a)$

(ii) z liegt im 2. Quadranten resp. $a < 0$ und $b \geq 0 \implies \varphi = \arctan(b/a) + \pi$

(iii) z liegt im 3. Quadranten resp. $a < 0$ und $b < 0 \implies \varphi = \arctan(b/a) - \pi$

(iv) Wenn $a = 0$. liegt die Zahl auf der imaginären Achse. Dann gilt:

- Wenn $b > 0$: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ in positive „i-Richtung"
- Wenn $b < 0$: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ in negative „i-Richtung"
- Wenn $b = 0$: $z = 0$, der Winkel ist undefiniert resp. irrelevant, da die Zahl einfach $0 \in \mathbb{C}$ ist und $0 \cdot e^{i\varphi} = 0$ für alle $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

Beispiel 2.2.6 (Kartesische Form in Polarform)
Gegeben sei die komplexe Zahl $z = -1 + i$. Diese möchten wir in ihre Polarform umwandeln.

Lösung: Für den Betrag ergibt sich

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Der Winkel φ berechnet sich grundsätzlich durch:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Für unsere Zahl:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Da der Punkt $(-1, 1)$ jedoch im zweiten Quadranten liegt, muss π addiert werden:

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} \quad (\text{resp. } 135^\circ)$$

Somit erhalten wir:

$$z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Bemerkung 2.2.7 (Multiplikation von zwei Polarformen)
Haben wir zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ in Polarform und betrachten das Produkt, so erhalten wir:

$$z \cdot w = \left(r_1 e^{i\varphi_1}\right) \cdot \left(r_1 e^{i\varphi_1}\right) = (r_1 \cdot r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Es werden also die Beträge multipliziert und die Winkel addiert. Graphisch in der Gaussschen Zahlenebene dreht sich die Zahl z gegen den Uhrzeigersinn um den Polarwinkel von w weiter und verlängert sich um den Faktor $|w|$.

Beispiel 2.2.8 (Multiplikation von zwei komplexen Zahlen)
Wir betrachten die beiden komplexen Zahlen $z = 1 + i$ und $w = 1 - i$. Wir wollen nun einmal in kartesischer und einmal in Polarform multiplizieren.

Lösung: In kartesischer Form ergibt sich

$$(1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 2.$$

In Polarform folgt

$$\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot \sqrt{2} e^{\frac{-i\pi}{2}} = (\sqrt{2})^2 e^0 = 2.$$

2.3 Komplexe Wurzeln

Bei der Suche nach den n-ten Wurzeln einer komplexen Zahl z zeigt sich eine interessante Eigenschaft: Zu jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ gibt es genau n verschiedene n-te Wurzeln. Dies lässt sich besonders anschaulich in der Polarform darstellen.
Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit der Darstellung $z = re^{i\varphi}$, wobei $r = |z|$ der Betrag und φ das Argument/der Polarwinkel von z ist. Dann ergibt sich die n-te Wurzel zunächst als:

$$\sqrt[n]{z} = \left(re^{i\varphi}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i\varphi}{n}}$$

Allerdings ist der Polarwinkel periodisch mit Periode $2\pi i$. Das bedeutet, wir können zum Argument φ beliebige Vielfache von 2π addieren, ohne den Wert von z zu ändern. Daher erhalten wir die allgemeine Form:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i(\varphi + 2k\pi)}{n}} \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Für $k = 0, 1, \ldots, n - 1$ ergeben sich genau n verschiedene Lösungen, die alle denselben Abstand $\sqrt[n]{r}$ vom Ursprung haben, aber um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ gegeneinander gedreht sind. Diese n Wurzeln liegen gleichmässig auf einem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{r}$ in der komplexen Ebene und bilden damit immer regelmässige n-Ecke.

Ein besonders wichtiger Spezialfall sind die **Einheitswurzeln**, also die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$.

Rechenmethode 2.3.1 (Komplexe Wurzeln)
Wir suchen die n verschiedenen Wurzeln einer komplexen Zahl z, also die Lösungen von $w^n = z$.

- Dafür schreiben wir z in Polarform, $z = re^{i\varphi}$.
- Die n verschiedenen Wurzeln sind dann $w_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i(\varphi + 2k\pi)}{n}}$ für $k = 0, 1, \ldots, n - 1$

Beispiel 2.3.2 (Komplexe Wurzeln)
Wir wollen alle komplexen Lösungen der Gleichung $w^3 = 8i$ bestimmen. Wir suchen also alle

dritten Wurzeln von $8i$.

Lösung: Zuerst stellen wir $z = 8i$ in Polarform dar. Der Betrag ist $r = |8i| = 8$ und das Argument $\varphi = \frac{\pi}{2}$, da $8i$ auf der imaginären Achse liegt. Somit ist die Polardarstellung von $8i$

$$z = 8i = 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Die n-ten Wurzeln einer komplexen Zahl berechnen sich durch:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Für $n = 3$ erhalten wir:

$$w_k = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i\left(\frac{\pi/2+2k\pi}{3}\right)} = 2 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$$

Wir berechnen die drei Lösungen für $k = 0, 1, 2$:

1. Erste Wurzel ($k = 0$):

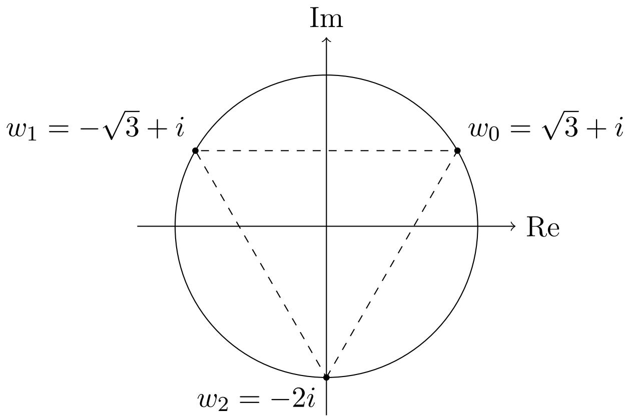
$$w_0 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

2. Zweite Wurzel ($k = 1$):

$$w_1 = 2 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

3. Dritte Wurzel ($k = 2$):

$$w_2 = 2 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2\,(0 - i) = -2i$$



Die drei Wurzeln liegen auf einem Kreis mit Radius $\sqrt[3]{8} = 2$ in der komplexen Ebene und dritteln diesen Kreis regelmässig. Die Winkel zwischen den Wurzeln betragen damit jeweils $120°$ resp. $\frac{2\pi}{3}$.

2.4 Komplexe Polynome

2.4.1 Fundamentalsatz der Algebra

Satz 2.4.1 (Fundamentalsatz der Algebra)
Jedes komplexe Polynom $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ vom Grad n (d.h. $a_n \neq 0$) zerfällt in n (nicht zwingend verschiedene) Linearfaktoren. Es gilt

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n(z - z_0) \cdot (z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

Bemerkung 2.4.2 (Nullstellen und Linearfaktoren)
In den Linearfaktoren $(z - z_i)$ einer Polynomzerlegung sind die Nullstellen abzulesen $z_0, \ldots, z_n$. Die Anzahl, wie oft die Nullstelle in der Linearfaktorzerlegung auftaucht, nennen wir Vielfachheit.

Satz 2.4.3 (Konjugierte Nullstelle)
Hat ein Polynom $p(z)$ eine komplexe Nullstelle z, so ist auch $\overline{z}$ eine Nullstelle.

Bemerkung 2.4.4
Man bemerke, dass wenn die Nullstelle reell ist, keine Aussage folgt, da $x = \overline{x}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.4.5
Wir suchen die beiden (komplexen) Nullstellen von $p(z) = z^2 - 2z + 2$.

Lösung: Wir nutzen dafür die p-q-Formel. Es folgt

$$z_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i.$$

Wir sehen also, dass $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 1 - i$ die beiden Nullstellen sind. In der Tat gilt nach Ausmultiplizieren der Linearfaktorzerlegung

$$(1+i)(1-i) = z^2 - 2z + 2.$$

Wir sehen ausserdem, dass $\overline{z}_1 = z_2$ respektive $\overline{1+i} = 1 - i$. Damit sind sowohl z_1 als auch $\overline{z}_1 = z_2$ Nullstellen.

2.5 Polynomdivision

Ein zentrales Werkzeug zum Finden von Nullstellen ist die *Polynomdivision*. Sie erlaubt es, aus einem bekannten Linearfaktor $(z - z_0)$ einen Divisor herauszufaktorisieren und das ursprüngliche Polynom auf einen Restfaktor zu reduzieren. Formal entspricht dies der schriftlichen Division ganzer Zahlen, aber für Polynome.
Haben wir ein Polynom $p(z)$ und ein Polynom $q(z)$, was ein echter Teiler von $p(z)$ ist, so gibt es ein eindeutiges Polynom $r(z)$ mit

$$p(z) = q(z)r(z)$$

Beispiel 2.5.1
Betrachten wir das Polynom

$$p(z) = z^3 - 1$$

und suchen alle seine drei komplexen Nullstellen.
Hinweis: Eine bekannte Nullstelle ist 1.

Lösung: Wir dividieren $p(z)$ durch den Linearfaktor $z - 1$, um an das Restpolynom zu kommen. Polynomdivision liefert:

$$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1).$$

Das reduzierte Polynom $z^2 + z + 1$ kann nun zum Beispiel mit der p-q-Formel untersucht werden und liefert die zwei weiteren Nullstellen

$$z_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Die vollständige Linearfaktorzerlegung lautet also

$$p(z) = z^3 - 1 = (z-1)(z + 1 - i\sqrt{3})(z + 1 + i\sqrt{3}).$$

Gleichzeitig können wir sehen, dass hier in dieser Aufgabe implizit nach den drei Einheitswurzeln gefragt ist (siehe Abschnitt 2.3). Wir hätten diese damit auch direkt durch $z_{1,2,3} = e^{\frac{2\pi ik}{3}}$ mit $k = 0, 1, 2$ finden können.

Beispiel 2.5.2
Wir suchen die vollständige Linearfaktorzerlegung (resp. alle vier Nullstellen) des Polynoms

$$p(z) = z^4 - z^3 - z^2 - z - 2.$$

Hinweis: 2 und -1 sind zwei reelle Nullstellen.

Lösung: Die erste Nullstelle finden wir durch den Hinweis. Setzt man 2 ein, so erhält man $P(2) = 0$, also ist $(z-2)$ ein Linearfaktor. Durch Polynomdivision ergibt sich:

$$p(z) = (z-2)\,(z^3 + z^2 + z + 1).$$

Wir finden erneut die Nullstelle -1 durch den Hinweis und Polynomdivision liefert uns:

$$p(z) = (z-2)\,(z+1)\,(z^2 + 1).$$

Damit ist

$$p(z) = (z-2)\,(z+1)\,(z+i)\,(z-i)$$

eine vollständige Linearfaktorzerlegung, resp. $2, -1, i, -i$ die vier Nullstellen des Polynoms.

Kapitel 3

Folgen

3.1 Definition, Beschränktheit und Monotonie

Definition 3.1.1 (Folge)
Eine **Folge** ist eine Funktion $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Der Funktionswert $x(n)$ wird n**-tes Folgenglied** genannt und mit x_n notiert. Folgen werden als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder oft auch nur als $(x_n)_n$ abgekürzt.

Beispiel 3.1.2 (Einfache Folgen)
Hier ein paar einfache Beispiele für Folgen:

- Die konstante Folge: $x_n = c$ mit einem beliebigen $c \in \mathbb{R}$.
- Die alternierende Folge: $x_n = (-1)^n$.
- Die Folge aller geraden Zahlen: $x_n = 2n$.

Beispiel 3.1.3 (Rekursiv definierte Folgen)
Definieren wir das nächste Folgenglied abhängig von den vorherigen, so nennen wir diese Darstellung rekursiv. Eine solche Bildungsvorschrift nennen wir auch Rekursionsvorschrift. Hier sind ein paar einfache Beispiele:

- Arithmetische Folge: $x_{n+1} = x_n + q$
- Geometrische Folge: $x_{n+1} = q \cdot x_n$.
- Gemischt: $x_{n+1} = q \cdot x_n + r$.

Rekursiv definierte Folgen können wir manchmal in explizite Ausdrücke umformen. Zum Beispiel für die Arithmetische Folge mit einem Startwert x_0 gibt es die explizite Darstellung: $x_n = x_0 + n \cdot q$. Ähnlich auch für die Geometrische Folge $x_n = x_0 \cdot q^n$. Im Allgemeinen ist so eine explizite Darstellung aber nicht immer möglich und oft sehr schwierig oder praktisch unmöglich zu finden.

Beispiel 3.1.4 (Fibonacci-Folge)
Eine der wohl berühmtesten Zahlenfolgen ist die Fibonacci-Folge. Sie ist rekursiv definiert mit Startwerten $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ und der Rekursionsvorschrift $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Wir erhalten so die Zahlenfolge:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

Es lässt sich auch hier eine explizite Darstellung für die n-te Fibonacci Zahl finden, wobei Φ der goldene Schnitt und Ψ der inverse goldene Schnitt sind.

$$x_n = \frac{\Phi^n - \Psi^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Definition 3.1.5 (Beschränktheit einer Folge)
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist **beschränkt**, wenn eine reelle Zahl $M \geq 0$ existiert, sodass $|x_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 3.1.6 (Einseitige Beschränktheit)
Eine Folge kann auch nur von oben oder nur von unten beschränkt sein.

Beispiel 3.1.7 ((Un-)Beschränkte Folgen)
Die Folge $x_n = (-1)^n$ ist von unten durch -1 und von oben durch 1 beschränkt.
Die Folge $y_n = n$ ist von unten durch 1 beschränkt aber von oben unbeschränkt.

Definition 3.1.8 (Monotonie einer Folge)
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst:

- **(monoton) steigend**, falls für alle $m, n \in \mathbb{N}$: $m > n \implies x_m \geq x_n$
- **strikt** (monoton) steigend, falls für alle $m, n \in \mathbb{N}$: $m > n \implies x_m > x_n$
- **(monoton) fallend**, falls für alle $m, n \in \mathbb{N}$: $m > n \implies x_m \leq x_n$
- **strikt** (monoton) fallend, falls für alle $m, n \in \mathbb{N}$: $m > n \implies x_m < x_n$.

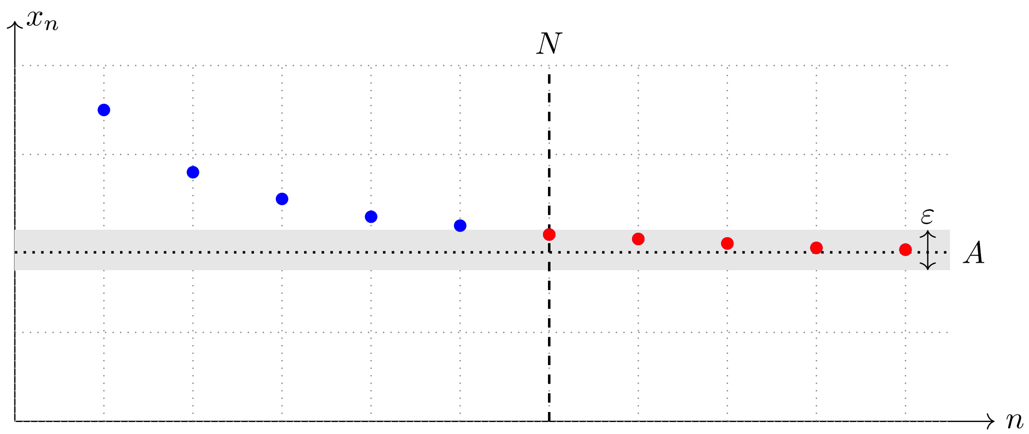
Wenn die Folge (strikt) monoton steigend oder fallend ist, nennen wir sie (strikt) monoton.

3.2 Grenzwerte

Definition 3.2.1 (Grenzwert einer Folge)
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Dann bezeichnen wir A, als **Grenzwert** dieser Folge, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ sodass, $|x_n - A| < \varepsilon\ \forall n \geq N$. Man schreibt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A$$

Bemerkung 3.2.2 (Intuition Grenzwert)
Anschaulich können wir die Definition wie folgt interpretieren:
Wir finden für jeden noch so kleinen Fehlerbereich ε einen grossen Index N, ab dem alle nachkommenden Folgenglieder maximal ε von A entfernt sind. Für genügend gross gewählte Indizes sind die kommenden Folgenglieder also beliebig nahe am Grenzwert A.



Beispiel 3.2.3
Hier ein paar Beispiele für konvergente Folgen inklusive ihrer Grenzwerte:

(i) $x_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(ii) $x_n = a$ für alle $n \geq 1$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

(iii) $x_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ für alle $n \geq 1$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(iv) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für alle $n \geq 1$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$. Das ist die Definition der Eulerschen Zahl e. Es ist wichtig, diesen Grenzwert zu kennen!

Bemerkung 3.2.4 (Nullfolgen)
Eine Folge, die gegen 0 konvergiert nennen wir Nullfolgen. Sie spielen eine grosse Rolle in der Analysis, gerade auch im Zusammenhang mit Reihen (siehe spätere Kapitel).

Beispiel 3.2.5 (Grenzwert Beweis)
Wir beweisen mithilfe der Definition, dass die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ den Grenzwert Null besitzt.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann wählen wir $N \in \mathbb{N}$ gross genug, sodass $N > \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Dann gilt für alle $n \geq N$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war gilt es insbesondere auch für alle beliebig kleinen ε. Damit folgt aus der Definition des Grenzwertes, dass $\frac{1}{n}$ gegen Null konvergiert. □

Bemerkung 3.2.6 (Rechnen mit Grenzwerten/ Grenzwertsätze)
Für den Grenzwert einer Folge gelten folgende Eigenschaften:

- Der Grenzwert ist eindeutig. Wenn eine Folge konvergiert, dann nähert sie sich immer nur einem einzigen eindeutigen Wert an.
- Der Grenzwert ist wohldefiniert unter Addition, Multiplikation und Division. Seien $(x_n)_n \to \bar{x}$ und $(y_n)_n \to \bar{y}$ zwei <u>konvergente</u> Folgen. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n \pm y_n = \bar{x} \pm \bar{y} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \bar{x} \cdot \bar{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \text{ mit } y_n, \bar{y} \neq 0$$

Beispiel 3.2.7 (Anwendungsbeispiel der Grenzwertsätze)
Wir betrachten die Folge $x_n = \frac{2^{-n}(1+1/n)^n}{n}$ und untersuchen die Konvergenz resp. den Grenzwert mittels der Grenzwertsätze.

Lösung: Wir schreiben diese Folge als ein Produkt zweier Ausdrücke, deren Grenzwert wir kennen.

$$\frac{2^{-n}(1+\frac{1}{n})^n}{n} = \underbrace{\frac{2^{-n}}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \to 0$$

Weil beide Faktoren einzeln konvergieren, können wir die Grenzwerte multiplizieren und sehen, dass die gegebene Folge zu $0 \cdot e = 0$ konvergiert.

Beispiel 3.2.8 (Typischer Fehler in der Anwendung der Grenzwertsätze)
Konvergieren zwei Folgen, so kann man Produkt und Summe der Grenzwerte einzeln berechnen (siehe vorherige Bemerkung). Konvergieren beide Summanden/Faktoren jedoch <u>nicht</u> einzeln, so geht dies nicht!

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \cdot x \neq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{n\to\infty} x = \text{“}0 \cdot \infty\text{“}$$

Ausdrücke der Form „$0 \cdot \infty$” sind damit nicht wohldefiniert.

Bemerkung 3.2.9 (Konvergenz und Beschränktheit)
Alle konvergenten Folgen sind beschränkt, aber nicht alle beschränkten Folgen konvergieren! Ein Gegenbeispiel ist die alternierende Folge $x_n = (-1)^n$. Sie ist beschränkt, aber konvergiert nicht.

Satz 3.2.10 (Monoton und beschränkt $\implies$ Konvergenz)
Sei $(x_n)_n$ eine monotone und beschränkte Folge. Dann konvergiert $(x_n)_n$.

Bemerkung 3.2.11 (Intuition)
Dieser Satz ist recht intuitiv, da wenn sie monoton ist in nur eine „Richtung" geht und wenn sie irgendwann „stoppt" – weil sie beschränkt ist – muss sie dort an ihrem Grenzwert angekommen sein.

Beispiel 3.2.12 (Nullfolge nach unten beschränkt)
Wir können so auch schnell sehen, dass die Folge $x_n = 1/n$ konvergiert, da sie nach unten durch 0 beschränkt ist und monoton fallend ist, da der Nenner immer grösser wird.

Satz 3.2.13 (Sandwich-Lemma)
Seien $(x_n)_{n=0}^\infty$, $(y_n)_{n=0}^\infty$ und $(z_n)_{n=0}^\infty$ Folgen reeller Zahlen, sodass für ein $N \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \geq N$ gelten. Es gelte, dass $(x_n)_{n=0}^\infty$ und $(z_n)_{n=0}^\infty$ konvergent sind und denselben Grenzwert besitzen. Dann ist auch die Folge $(y_n)_{n=0}^\infty$ konvergent, und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Beweis. Siehe A.3.1. □

Bemerkung 3.2.14 (Intuition hinter dem Sandwich-Lemma)
Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quetschen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weiter und weiter ein, sodass sie alle irgendwann ε-nah am Grenzwert sind, woraus folgt, dass auch die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diesen Grenzwert haben muss.

Beispiel 3.2.15 (Grenzwert mittels Sandwich-Lemma)
Wir beweisen mittels des Sandwich-Lemmas, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Lösung: Wir wissen, dass der Sinus durch -1 und 1 beschränkt ist. Damit folgt die Ungleichungskette

$$-1 \leq \sin n \leq 1.$$

Bei Division mit n finden wir

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

für alle $n \geq 1$. Weil $1/n \to 0$ konvergiert wenn $n \to \infty$ folgt aus dem Sandwich Lemma, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Wir sehen damit, dass $-1/n$ und $1/n$ unsere Folge im Grenzwert gegen Null „einquetschen".

Kapitel 4

Reihen und Potenzreihen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Konvergenz von Reihen. Wir führen ausserdem den Begriff der Potenzreihe und des Konvergenzradius ein.

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition 4.1.1 (Konvergente Reihe)
Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, und sei $A \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass die **Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ zu A konvergiert, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) = \lim_{n\to\infty} s_n = A.$$

Dabei ist s_n die Folge an **Partialsummen** $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Wir nennen a_n das n-te Element oder den n-ten Summanden der Reihe.

Wir nennen die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **konvergent**, wenn s_n einen Grenzwert annimmt; in diesem Fall nennen wir ihn den **Wert der Reihe**. Andernfalls, heisst es, dass die Reihe nicht konvergent ist. Wenn s_n nach ∞ (bzw. nach $-\infty$) **divergiert**, nennen wir die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent zu ∞ (bzw. $-\infty$).

Satz 4.1.2 (Notwendige Bedigung für Reihenkonvergenz)
Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, so muss die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge sein.

Bemerkung 4.1.3
Das heisst, es ist notwendig für die Konvergenz der Reihe, dass die einzelnen Summanden gegen Null konvergieren müssen. Das ergibt auch intuitiv Sinn, denn wenn die einzelnen Summanden nicht irgendwann verschwindend klein werden, kann ich mich nicht einem konstanten Wert annähern.

Beispiel 4.1.4 (Nullfolgenkriterium)
Begründen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}$$

nicht konvergiert.

Lösung: Wir sehen, dass die Folge an Summanden $\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}$ keine Nullfolge ist, weil

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/n}} = 1.$$

Damit kann die Reihe nicht konvergieren, da die notwendige Bedingung nicht erfüllt ist.

Beispiel 4.1.5 (Geometrische Reihe)
Reihen der Form
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$
nennen wir **geometrische Reihen**. Diese konvergieren für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Dann konvergieren Sie gegen
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Bemerkung 4.1.6 (Grenzwert der geometrischen Reihe)
Wir betrachten die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ und beobachten

$$\begin{aligned}(1-q)\cdot s_n = (1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^n) &= (1+q+q^2+\cdots+q^n) - q\cdot(1+q+q^2+\cdots+q^n)\\ &= 1+q+q^2+\cdots+q^n-q-q^2-q^3-q^4-\cdots-q^{n+1} = 1-q^{n+1}\end{aligned}$$

Demnach folgt
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$
Dieser Grenzwert existiert, genau dann wenn $|q| < 1$, und dann gilt
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \qquad |q| < 1.$$

Beispiel 4.1.7 (Harmonische Reihe)
Die Reihe, die alle inversen natürlichen Zahlen summiert nennen wir die **harmonische Reihe**.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Wir sehen, dass die Summanden gegen Null konvergieren, denn $\frac{1}{k} \to 0$. Die Reihe divergiert aber dennoch gegen ∞. Das sehen wir gut daran, dass
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \geq 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{=\frac{1}{2}}+\cdots \to \infty$$

Damit ist sie ein Beispiel dafür, dass das Summieren einer Nullfolge $1/k \to 0$ nur notwendig, aber nicht hinreichend ist für die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$.

4.1.1 Reihenberechnungen

Wir können durch gezielte Umformungen und Vereinfachungen die Werte von Reihen explizit berechnen. Häufig nutzen wir dabei den bekannten Grenzwert einer geometrischen Reihe.

Beispiel 4.1.8 (Reihenberechnung)
Berechnen Sie den Wert der Reihe
$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{5^n}$$
für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

Lösung: Wir kennen den Wert der geometrischen Reihe mit $q = \frac{1}{5} < 1$. Daher möchten wir die gegebene Reihe in eine solche umformen. Wir sehen nach den Potenzgesetzen, dass gilt

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{5^k} \frac{1}{5^{n-k}} = \frac{1}{5^k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{5^{n-k}} = \frac{1}{5^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n},$$

wobei wir im letzen Schritt eine *Indexverschiebung* gemacht haben. Als Ergebnis erhalten wir damit

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5^k} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{5}} \right) = \frac{1}{5^k} \frac{5}{4} = \frac{1}{4 \cdot 5^{k-1}}.$$

Beispiel 4.1.9 (REIHENBERECHNUNG SCHWIERIG)
Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1} + 1}{3^n}.$$

Lösung: Wir formen um, sodass wir zwei geometrische Reihen erhalten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1} + 1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{-2}{3} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n.$$

Für beide Summanden können wir die Werte der Reihen mithilfe der bekannten Formel für die geometrische Reihe berechnen. Wir müssen jedoch jeweils beachten, dass wir erst ab $n = 1$ summieren und daher den Term für $n = 0$ abziehen müssen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1} + 1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{-2}{3} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - (\frac{-2}{3})} - 1 \right) + \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - 1 \right) = \frac{3}{10}.$$

4.1.2 Teleskopsummen

Teleskopsummen sind bestimmte Summen, deren Ergebnis nur vom ersten und letzten Term abhängen, da sich alle Terme in der Mitte gegenseitig auslöschen. Es sind also Summen der Form

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i - a_{i+1}) = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_{n+1}.$$

Dann gilt für den Wert der Reihe, dass

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1}.$$

Eine solche Teleskopreihe ist also genau dann konvergent, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ existiert. Um eine Reihe in eine Teleskopform zu bringen bietet sich meist eine Partialbruchzerlegung an. Für mehr Informationen siehe Abschnitt A.4.1.

Beispiel 4.1.10 (TELESKOPSUMME)
Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihe mithilfe einer Teleskopsumme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Hinweis: Machen Sie eine Partialbruchzerlegung.

Lösung: Wir beginnen mit einer Partialbruchzerlegung. Es folgt

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Unsere Partialsummen haben damit die Form

$$\sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdots - \frac{1}{k+1}.$$

Damit sehen wir dass die Reihe eine Teleskopreihe ist und es folgt für den Grenzwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 1.$$

Beispiel 4.1.11 (Teleskopsumme)
Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$ gilt.
Hinweis: Schreiben Sie die Partialsummen als Teleskopsummen. Nutzen Sie dafür Partialbruchzerlegung.

Beweis. Wir beginnen mit einer Partialbruchzerlegung.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

Jetzt ist zu erkennen, dass diese Summe eine Teleskopsumme ist. Es kürzen sich alle Terme weg, bis auf den ersten und den Grenzwert des letzten. Dies ist mit vollständiger Induktion (siehe Abschnitt 1.2) zu beweisen. Definieren wir dafür $s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$. Wir wollen zeigen, dass $s_n = \frac{1}{2\cdot 1-1} - \frac{1}{2n+1}$. Dafür nutzen wir einen Induktionsanfang

$$s_1 = \frac{1}{2\cdot 1 - 1} - \frac{1}{2\cdot 1 + 1}.$$

Und einen Induktionsschritt

$$s_{n+1} = \frac{1}{2\cdot 1-1} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)-1} - \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2\cdot 1 - 1} - \frac{1}{2(n+1)-1}.$$

Damit können wir also berechnen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2\cdot 1-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2\cdot 1-1} = 1.$$

Der Wert der Reihe evaluiert sich damit zu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)}_{=1} = \frac{1}{2}.$$

□

4.1.3 Konvergenzkriterien

Bemerkung 4.1.12 (Konvergenz des Endes)
Es reicht, die Reihe ab einem beliebigen $N \in \mathbb{N}$ zu betrachten. Nehmen wir an, wir wollen das Verhalten der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ untersuchen. Dann reicht es das Verhalten des Endes der Partialsummen zu betrachten.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k$$

Der erste Summand ist immer eine endliche Zahl und konvergiert daher immer. Es ist also nur relevant den Schluss, also ab einem beliebig grossen $N \in \mathbb{N}$ die Reihe zu untersuchen.

Satz 4.1.13 (Majoranten- und Minorantenkriterium)
Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei Reihen, dass $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$, und wir haben insbesondere

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ divergent zu } \infty \implies \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ divergent zu } \infty.$$

Beispiel 4.1.14
Zeigen Sie mithilfe des Majorantenkriteriums, dass die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

Lösung: Wir wissen, dass für jedes $n \geq 1$ gilt

$$\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n} \iff n2^n \geq 2^n \iff n \geq 1.$$

Demnach folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty,$$

weil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ eine geometrische Reihe mit $|q| = |\frac{1}{2}| < 1$ ist.

Bemerkung 4.1.15 (Minorante, Harmonische Reihe)
Wir haben mithilfe einer Minorante bewiesen, dass die Harmonische Reihe divergiert. Prüfen Sie dieses Argument noch einmal nach!

Beispiel 4.1.16
Zeigen Sie, dass die folgende Reihe divergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$

Lösung: Die Idee ist, diese Reihe mit der harmonischen Reihe zu vergleichen, da sich $\frac{n}{n^2+1}$ asymptotisch, wie $\frac{1}{n}$ verhält. Wir sehen, dass

$$\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+n} = \frac{1}{n+1}$$

für alle $n \geq 1$. Weil die harmonische Reihe divergiert folgt aus dem Minorantenkriterium die Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

Satz 4.1.17 (Wurzelkriterium)
Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge und

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dann gilt für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$$\alpha < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{konvergiert absolut}$$

und

$$\alpha > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{konvergiert nicht.}$$

Beispiel 4.1.18 (Geometrische Reihe)
Zeigen Sie, dass die geometrische Reihe für alle $|q| < 1$ konvergiert und anderenfalls divergiert.

Lösung: Die geometrische Reihe hat die Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

Nach dem Wurzelkriterium berechnen wir

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|q^k|} = |q|.$$

Damit folgt das Resultat direkt aus dem Wurzelkriterium und einer zusätzlichen Begründung. Für $|q| = 1$ divergiert die Reihe auch, da es $+1$ resp. -1 aufsummiert.

Beispiel 4.1.19 (Wurzelkriterium)
Untersuchen Sie mithilfe des Wurzelkriteriums, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2^n)}{e^n}$$

konvergiert.

Lösung: Wir schreiben um

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2^n)}{e^n} = \log(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$$

und nutzen das Wurzelkriteriums. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{e^n}} = \frac{1}{e} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}_{\to 1} = \frac{1}{e} < 1.$$

Damit konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriteriums.

Satz 4.1.20 (D'Alembert Quotientenkriterium)
Es sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es sei angenommen, dass

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad \text{existiert.}$$

Dann gilt für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$$\alpha < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{konvergiert absolut}$$

und

$$\alpha > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{konvergiert nicht.}$$

Beispiel 4.1.21 (Quotientenkriterium)
Untersuchen Sie mithilfe des Quotientenkriteriums, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

konvergiert.

Lösung: Wir nutzen das Quotientenkriterium. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right|}{\left|\frac{n!}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e}.$$

Weil $1/e < 1$ konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium absolut.

Bemerkung 4.1.22
Nicht alle Konvergenzkriterien sind gleich sinnvoll für jede Berechnung. Es gibt eine „sinnvolle" Reihenfolge beim Anwenden dieser Kriterien. Diese Reihenfolge ist natürlich nicht immer die beste, aber eine gute „Faustregel".

1. Ist (a_n) überhaupt eine Nullfolge? $\rightsquigarrow$ Nullfolgenkriterium
2. Ist der Quotient $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ gut abschätzbar (resp. Fakultäten)? $\rightsquigarrow$ Quotientenkriterium
3. Sind Potenzen von n enthalten? $\rightsquigarrow$ Wurzelkriterium
4. Majoranten-/ Minorantenkriterium

4.2 Potenzreihen

Es lassen sich aus konvergenten Reihen Funktionen definieren.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

Solche Funktionen nennt man **Potenzreihen**. Damit diese Definition Sinn ergibt, muss die Reihen absolut konvergent sein. Diese Konvergenz ist aber abhängig davon, welchen Funktionswert x man in seine Potenzreihe einsetzt. Die Stelle a nennt man den **Entwicklungspunkt** und die Werte x - für welche die Reihe absolut konvergiert - nennen wir den **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

4.2.1 Konvergenzradius

Bemerkung 4.2.1 (Was ist der Konvergenzradius?)
Wir haben nun eine Reihe der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

und möchten wissen, für welche x diese Reihe konvergiert. Dafür können wir wie gewohnt das Wurzelkriterium nutzen und finden:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(x-a)^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}|x-a| < 1.$$

Damit folgt für unsere Einschränkung an die x-Werte

$$|x-a| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} := R$$

Also finden wir am Ende mit dieser Definition von R, dass

$$-R + a < x < R + a.$$

Damit konvergiert die Reihe dann, wenn x im offenen Intervall $(-R+a, R+a)$ liegt. Genau das ist der Konvergenzradius einer Potenzreihe!

Definition 4.2.2 (Konvergenzradius, Formel von Cauchy-Hadamard)
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ eine Potenzreihe. Der **Konvergenzradius** der Reihe ist die Zahl $R \in \mathbb{R}_0^+$, definiert durch

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Bemerkung 4.2.3 (Quotientenkriterium für den Konvergenzradius)
Der Konvergenzradius lässt sich (wenn der Grenzwert existiert!) auch mit dem Quotientenkriterium berechnen.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

Falls dieser Grenzwert existiert, so ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{\rho}$.

Satz 4.2.4 (Konvergenz von Potenzreihen)
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty)$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < R$, und konvergiert nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| > R$.

Insbesondere können wir für $x \in (-R+a, R+a)$ die folgende Funktion definieren

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k.$$

Der Konvergenzradius gibt an, wie weit man sich vom Entwicklungspunkt a entfernen kann, sodass die Reihe noch konvergiert. Für $|x-a| = R$ (d.h. am Rand des Konvergenzintervalls) kann die Reihe konvergieren oder divergieren - das muss separat untersucht werden.

Beispiel 4.2.5
Finden Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{n^2}.$$

Lösung: Wir berechnen mithilfe des Wurzelkriteriums

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 \to 1.$$

Damit ist der Konvergenzradius dieser Reihe das offene Intervall $(2-1, 2+1)n = (1, 3)$.

Beispiel 4.2.6 (Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion)
Die Exponentialfunktion e^x können wir als Potenzreihe (um den Entwicklungspunkt $a = 0$) schreiben als

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

Wir sehen, dass der Konvergenzradius dieser Potenzreihe unendlich gross ist. Es gilt

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Damit gilt $R = \infty$. Die Reihendarstellung der Exponentialfunktion konvergiert damit auf ganz $\mathbb{R}$, was auch unserer Intuition entspricht, da die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Beispiel 4.2.7 (Konvergenzradius schwierig)
Finden Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^{2n}.$$

Lösung: Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^{2n}$$

enthält nur gerade Potenzen von $(z-1)$. Durch die Substitution $w = (z-1)^2$ ergibt sich:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} w^n.$$

Für diese Reihe in w wird der Konvergenzradius mit dem Wurzelkriterium bestimmt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n}} \to \frac{1}{2}.$$

Somit gilt $R_w = 2$, d.h., die Reihe in w konvergiert für $|w| < 2$. Rückeinsetzen von $w = (z-1)^2$ liefert:

$$|z-1|^2 < 2 \quad \Rightarrow \quad |z-1| < \sqrt{2}.$$

Der Konvergenzradius der ursprünglichen Reihe ist daher $R = \sqrt{2}$.

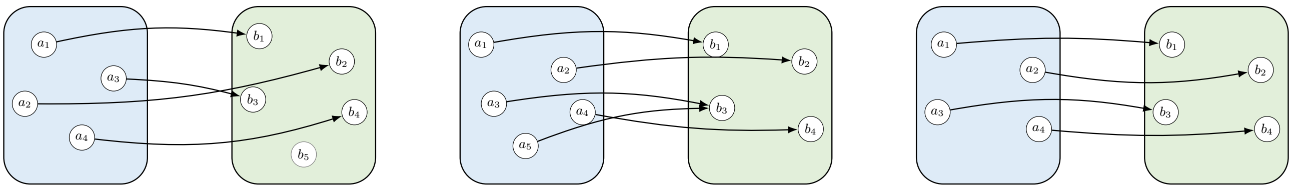
Kapitel 5

Stetige Funktionen

5.1 Grundlegende Eigenschaften von Funktionen

5.1.1 Inektivität, Surjektivität und Bijektivität

Betrachte eine Funktion $f\colon A \to B$ zwischen zwei Mengen A (*Definitionsbereich*) und B (*Wertebereich*). Wir unterscheiden in die folgenden drei Fälle.



Definition 5.1.1 (Injektiv)
Eine Funktion $f : A \to B$ heisst *injektiv*, wenn verschiedene Elemente des Definitionsbereichs stets auf verschiedene Elemente des Wertebereichs abgebildet werden:

$$\forall x_1, x_2 \in A:\; x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2).$$

Anschaulich heisst das: keine zwei Pfeile aus A landen auf demselben Element von B. In der linken Teilabbildung wird dies gezeigt, wobei jedoch ein Element $b_5 \in B$ gar nicht getroffen wird. (Damit ist f *nicht* surjektiv!)

Beispiel 5.1.2 (Injektive Funktionen)
Die Funktion x^3 ist auf ganz $\mathbb{R}$ injektiv, die Funktion x^2 hingegen nicht! Wir können beides beweisen, indem wir die Definition für Injektivität nutzen. Es muss dafür gelten, dass $f(x) = f(y) \implies x = y$. Das ist für $f(x) = x^2$ offensichtlich nicht der Fall, da $x^2 = (-x)^2$ aber $x \neq -x$. Für x^3 gilt dies aber, da $(-x)^3 = (-x)(-x)^2 = -x^3$.

Definition 5.1.3 (Surjektiv)
Eine Funktion $f : A \to B$ heisst *surjektiv*, wenn jedes Element des Wertebereichs getroffen wird:

$$\forall y \in B\; \exists x \in A:\; f(x) = y.$$

In der mittleren Teilabbildung wird jedes Element von B erreicht, allerdings zeigen dort zwei verschiedene Elemente $a_3, a_5 \in A$ auf dasselbe $b_3 \in B$. Damit ist f *nicht* injektiv!

Beispiel 5.1.4
Die Funktion x^2 ist von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ surjektiv, aber nicht injektiv. Das sehen wir, da wir für jede positive reelle Zahl x eine Quadratwurzel $\sqrt{x}$ haben, für die gilt: $\sqrt{x}^2 = x$.
Die Funktion $\sin x$ ist von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ weder injektiv noch surjektiv. Auf $[-1, 1]$ hingegen ist sie surjektiv!

Genauso verhält sich $\cos x$. Injektivität können wir offensichtlich widerlegen, weil sin (und auch cos) periodisch sind, resp. $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$. Surjektivität auf $[-1, 1]$ folgt direkt aus der Definition im Einheitskreis.

Definition 5.1.5 (Bijektiv)
Eine Funktion $f : A \to B$ heisst *bijektiv*, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist. Das bedeutet,

$$\forall y \in B\ \exists!\, x \in A : \ f(x) = y.$$

Die rechte Teilabbildung illustriert diesen Fall: jedes Element von A wird auf genau ein Element von B abgebildet (injektiv), und jedes Element von B wird genau einmal getroffen (surjektiv). Somit ist eine *Eins-zu-eins-Korrespondenz* gegeben und die Funktion damit bijektiv.

Beispiel 5.1.6
Die Funktion x^3 ist eine bijektive Funktion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da sie injektiv und surjektiv ist. Genauso die Identitätsfunktion x. Die Funktion e^x ist von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht bijektiv, da sie nicht surjektiv auf $\mathbb{R}$ ist. Von $\to \mathbb{R}_{>0}$ hingegen ist e^x bijektiv!

5.1.2 Monotonie und Beschränktheit

Definition 5.1.7 (Montone Funktion)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heisst

- **(monoton) steigend** wenn für alle $x, y \in D$, gilt

$$x < y \implies f(x) \leq f(y),$$

- **strikt (monoton) steigend** wenn für alle $x, y \in D$, gilt

$$x < y \implies f(x) < f(y),$$

Analog lässt sich auch **(monoton) fallend** und **strikt (monoton) fallend** definieren.

Beispiel 5.1.8
Die Exponentialfunktion e^x ist (streng) monoton steigend, genauso die $\arctan x$ Funktion. Die Funktion x^2 ist auf $\mathbb{R}$ nicht monoton: sie ändert ihr Monotonieverhalten bei 0.

Definition 5.1.9 (Beschränkte Funktion)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere Teilmenge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f ist **von oben beschränkt**, falls eine Konstante $M > 0$ existiert, sodass

$$f(x) \leq M \text{ für alle } x \in D.$$

Die Funktion f ist **von unten beschränkt**, falls eine Konstante $M > 0$ existiert, sodass

$$f(x) \leq -M \text{ für alle } x \in D.$$

Die Funktion f ist **beschränkt**, wenn sie von oben und unten beschränkt ist.

Beispiel 5.1.10
Die Exponentialfunktion ist von unten durch 0 beschränkt. Nach oben hingegen ist sie unbeschränkt. Die Sinus Funktion ist von oben und unten durch ± 1 beschränkt.

Satz 5.1.11 (Steng monotone Funktionen sind injektiv)
Sei f eine steng monotone Funktion. Dann ist f injektiv.

5.1.3 Symmetrien - gerade und ungerade Funktionen

Definition 5.1.12 (Gerade und ungerade Funktionen)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nennen f

- **gerade**, wenn $\forall x\ f(-x) = f(x)$. Dann ist f spiegelsymmetrisch zur y-Achse.
- **ungerade**, wenn $\forall x\ f(-x) = -f(x)$. Dann ist f Punktsymmetrisch zum Ursprung.

Beispiel 5.1.13 (Gerade/Ungerade Funktionen)
Das Polynom x^n ist gerade/ungerade abhängig davon, ob n gerade/ungerade ist. (Prüfen Sie das nach!)

Beispiel 5.1.14 (Gerade/Ungerade Funktionen)
Der Sinus ist eine ungerade Funktion und der Cosinus ist gerade.

5.2 Charakterisierungen der Stetigkeit

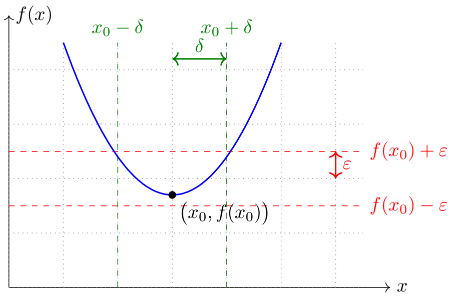
Definition 5.2.1 (Stetigkeit an einer Stelle x_0)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f **an der Stelle** $x_0 \in D$ **stetig** ist, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$\forall x \in D, \qquad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Die Funktion f ist **stetig** auf D, wenn f an jeder Stelle in D stetig ist.

Bemerkung 5.2.2 (Intuition für Stetigkeit)
Man kann die Stetigkeit an der Stelle x auch mit Intervallen interpretieren. Es heisst, dass für jede beliebige kleine ε-Umgebung von $f(x)$, existiert eine δ-Umgebung, deren Bild unter f in der ε-Umgebung enthalten ist. Also explizit gilt $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, sodass

$$f(x - \delta, x + \delta) \subseteq (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon).$$



Es ist sehr mühsam mit dem ε-δ-Kriterium Stetigkeitsbeweise durchzuführen. Daher ist es hilfreich ein äquivalentes Kriterium zu nutzen, und zwar die sogenannte **Folgenstetigkeit**.

Satz 5.2.3 (Stetigkeit $\iff$ Folgenstetigkeit)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge, sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion f ist an der Stelle x_0 genau dann stetig wenn, für alle Folgen $(x_n)_n \subseteq D$, die gegen x_0 konvergieren, $f((x_n)_n)$ gegen $f(x_0)$ konvergiert. Es gilt also:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

Bemerkung 5.2.4 (Intuition hinter Folgenstetigkeit)
Die Folgenstetigkeit ist damit ein äquivalentes Kriterium für Stetigkeit. Intuitiv betrachtet besagt die Folgenstetigkeit, dass wenn wir uns genügend nahe einer Stelle x_0 nähern, so nähert sich auch der Funktionswert immer weiter $f(x_0)$ an. Diese Aussage ist keinesfalls trivial und ist für nicht stetige

Funktionen nicht erfüllt! Man betrachte dafür zum Beispiel eine beliebige Treppenfunktion resp. eine Funktion mit einer Sprungstelle.

Bemerkung 5.2.5 (Arten von Unstetigkeitsstellen)
Es gibt die folgenden Arten von Unstetigkeitsstellen:

- Hebbare Unstetigkeitsstelle
  Hier existieren beide Grenzwerte und sind identisch, aber ungleich dem Funktionswert.
- Sprungstelle
  Hier existieren beide Grenzwerte, sie sind aber nicht identisch.
- Polstellen und unendliche Oszillationen
  Alle anderen Fälle, also wo mindestens einer der beiden Grenzwerte nicht existiert – also unendlich ist (Polstelle) oder unendlich oszilliert.

5.3 Konsequenzen der Stetigkeit

Satz 5.3.1 (Zwischenwertsatz)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \leq f(b)$. Dann gilt für jede reelle Zahl c mit $f(a) \leq c \leq f(b)$, dass ein $\bar{x} \in [a, b]$ existiert, sodass $f(\bar{x}) = c$.

Bemerkung 5.3.2 (Intuition zum Zwischenwertsatz)
Dieses Resultat ist in gewissem Sinne das Herzstück der Stetigkeit. Es besagt, dass wenn eine stetige Funktion einen Funktionswert $f(a)$ und einen Funktionswert $f(b)$ annimmt, so muss sie alle Funktionswerte dazwischen irgenwann angenommen haben. Sie kann also nicht einfach von $f(a)$ zu $f(b)$ „springen". Das verhindert genau die Stetigkeit.

Beispiel 5.3.3 (Nullstellenbeweis mit dem Zwischenwertsatz)
Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = e^x + \sin x$ im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ eine Nullstelle hat.
Hinweis: Nutzen Sie den Zwischenwertsatz.

Lösung: Wir können beobachten, dass

$$f(-\pi/2) = e^{-\pi/2} - 1 < 0 \qquad\qquad f(\pi/2) = e^{\pi/2} + 1 > 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz muss also ein $\bar{x} \in [-\pi/2, \pi/2]$ existieren, für das $f(\bar{x}) = 0$ angenommen wird. Das ist genau eine Nullstelle von f.

Beispiel 5.3.4 (Existenz einer Lösung mit dem Zwischenwertsatz)
Begründen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Gleichung $x^2 = e^x$ im Intervall $[-1, 0]$ eine Lösung hat.

Lösung: Wir definieren die Funktion $f(x) = e^x - x^2$ und suchen im gegebenen Intervall eine Nullstelle. Wir beobachten, dass die Funktion f stetig ist, da e^x und x^2 beide stetig sind. Es gilt $f(-1) = 1/e - 1 < 0$ und $f(0) = 1 - 0 > 0$. Damit hat f nach dem Zwischenwertsatz im Intervall $[-1, 0]$ eine Nullstelle und die Gleichung damit eine Lösung.

Satz 5.3.5 (Satz von der Umkehrabbildung)
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, strikt monotone Funktion. Dann ist $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ wieder ein Intervall und die Funktion $f : I \to f(I)$ hat eine stetige, streng montone Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$.

Bemerkung 5.3.6
Es ist wichtig zu erkennen, dass eine stetige, streng monotone Funktion auf einem Intervall immer injektiv ist. Die Einschränkung auf $f(I)$ im Bild, verleiht uns daher eine bijektive Funktion, für die eine Umkehrfunktion immer existiert. Das ist die Essenz vom Satz der Umkehrabbildung.

Zur Erinnerung, eine Menge im $\mathbb{R}$ ist kompakt, wenn sie **abgeschlossen** und **beschränkt** ist. Kompakte Intervalle sind daher genau die abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ mit $a < b$.

Definition 5.3.7 (MAXIMA UND MINIMA VON FUNKTIONEN)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ sei eine reellwertige Funktion auf D. Wir sagen, dass die Funktion f ihren Maximalwert an einem Punkt $x_0 \in D$ annimmt, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$ gilt. Wir nennen $f(x_0)$ das **Maximum** von f. Analog dazu nimmt f seinen Minimalwert an $x_0 \in D$, wenn $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in D$ gilt. In diesem Fall nennen wir $f(x_0)$ das **Minimum** von f. Maxima und Minima werden zusammenfassend als **Extremwerte** oder **Extrema** bezeichnet.

Satz 5.3.8 (SATZ VON WEIERSTRASS)
Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f sowohl ein Maximum, als auch ein Minimum an.

Bemerkung 5.3.9 (ANWENDUNG)
Dieser Satz ist zentral für Extremwertaufgaben auf kompakten Intervallen und auch später bei der Kurvendiskussion.

Kapitel 6

Differentialrechnung

In diesem Kapitel widmen wir uns der Differenzierbarkeit von Funktionen und den daraus resultierenden Eigenschaften und Konsequenzen. Zum Schluss führen wir konvexe Funktionen ein.

6.1 Differenzierbarkeit und die Ableitungsfunktion

Im Folgenden sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere Teilmenge ohne isolierte Punkte, also ist explizit jedes $x \in D$ ein Häufungspunkt von $D \setminus \{x\}$. Ein Häufungspunkt einer Menge ist anschaulich gesprochen ein Punkt, bei dem immer noch andere Punkte der Menge in beliebiger Nähe zu finden sind. Ein Punkt $x \in D$ heisst Häufungspunkt von D, wenn in jeder Umgebung von x mindestens ein Punkt von D liegt, der von x verschieden ist.

Definition 6.1.1 (Ableitung)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion f ist **differenzierbar** an der Stelle x_0, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Der Wert $f'(x_0)$ ist die **Ableitung der Funktion f an der Stelle** x_0. Falls f an jeder Stelle $x \in D$ differenzierbar ist, so ist f **differenzierbar auf** D und die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$ die **Ableitung** von f.

Es gibt viele verschiedene Interpretationen der Ableitung einer Funktion. Hier sind einige der wichtigsten:

- Die Ableitung an einer Stelle x_0 ist der Wert der Steigung einer an diesem Punkt angelegten Tangente an den Graphen von f.
- Die Ableitungsfunktion ist die beste lokale lineare approximation der Funktion f.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|), \quad \text{wenn} \quad x \to x_0$$

Beispiel 6.1.2 (Differenzierbarkeit)
Zeigen Sie mithilfe der Definition der Ableitung, dass die Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle x_0 differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(x_0) = 2x_0$.

Lösung: Wir nutzen die Definition der Ableitung und berechnen so $f'(x_0)$. Es folgt

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0.$$

6.1.1 Ableitungsregeln

Summen- und Produktregel

Satz 6.1.3 (Summen- und Produktregel)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 differenzierbar. Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ differenzierbar an der Stelle x_0 und es gilt:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Insbesondere ist jedes Vielfache von f differenzierbar an der Stelle x_0 und $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Kettenregel

Satz 6.1.4 (Kettenregel)
Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und $f : D \to E$ an der Stelle x_0 differenzierbar und $g : E \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $y_0 = f(x_0)$. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle x_0 und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Quotientenregel

Satz 6.1.5 (Quotientenregel)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 differenzierbar. Wenn $g(x_0) \neq 0$, dann ist f/g an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Beispiel 6.1.6
Leiten Sie folgende Funktionen ab.

$$(1)\ e^x\left(1 - \sin^2(x)\right) \qquad (2)\ \sin\left(e^{x^2}\right) \qquad (3)\ \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \qquad (4)\ x\cos(3^x)$$

Lösung.

(1) Wir arbeiten von Aussen nach Innen und „lösen zuerst das Produkt auf". Es folgt nach der Produktregel

$$\left(e^x\big(1 - \sin^2(x)\big)\right)' = (e^x)'(1 - \sin^2 x) + e^x(1 - \sin^2 x)'.$$

Jetzt wissen wir, dass $(e^x)' = e^x$ und müssen daher nur die Ableitung von $(1 - \sin^2 x)$ berechnen. Das folgt mittels der Kettenregel mit innerer Funktion $\sin x$ und äusserer Funktion $(\cdot)^2$ (oder der Produktregel, denn wir können auch $\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$ betrachten)

$$\big(\sin^2(x)\big)' = 2\sin(x)\cos(x).$$

Damit erhalten wir insgesamt nach Ausklammern von e^x:

$$e^x\left(1 - 2\cos(x)\sin(x) - \sin^2(x)\right).$$

(2) Wir betrachten zuerst die äussere Funktion $\sin(\cdot)$ und dann die innere Funktion e^{x^2}. Nach der Kettenregel gilt

$$\big(\sin(e^{x^2})\big)' = \cos\left(e^{x^2}\right) \cdot \left(e^{x^2}\right)'.$$

Nun ist $\left(e^{x^2}\right)'$ wiederum nach der Kettenregel $e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x$. Zusammen ergibt sich somit

$$\big(\sin(e^{x^2})\big)' = 2x\, e^{x^2} \cos\left(e^{x^2}\right).$$

(3) Hier bietet sich die Quotientenregel an. Setze $u = e^x + 1$ und $v = e^x - 1$. Dann ist $u' = e^x$ und $v' = e^x$ und die Quotientenregel liefert

$$\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{e^x(e^x-1) - (e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2}.$$

Im Zähler kürzen sich die e^{2x}-Terme, es bleibt

$$\frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}.$$

Damit folgt

$$\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)' = -\frac{2e^x}{\left(e^x-1\right)^2}.$$

(4) Wir „lösen zuerst das Produkt auf” und wenden die Produktregel an. Sei $f(x) = x$ und $g(x) = \cos(3^x)$. Dann ist $f'(x) = 1$ und

$$g'(x) = \big(\cos(3^x)\big)' = -\sin(3^x) \cdot \big(3^x\big)'.$$

Die Ableitung von 3^x finden wir durch den Trick, dass

$$3^x = e^{\ln(3^x)} = e^{x\ln(3)}.$$

Damit ist die Ableitung einfach $(3^x)' = 3^x \ln 3$. Somit

$$g'(x) = -\sin(3^x)\, 3^x \ln 3.$$

Die Produktregel gibt dann

$$\big(x\cos(3^x)\big)' = 1 \cdot \cos(3^x) + x \cdot \big(-\sin(3^x)\, 3^x \ln 3\big).$$

Also

$$\big(x\cos(3^x)\big)' = \cos(3^x) - x\, 3^x \ln 3\ \sin(3^x).$$

Ableitung des Inversen

Satz 6.1.7 (Ableitung des Inversen)
Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : D \to E$ eine stetige, bijektive Funktion, dessen Inverses $f^{-1} : E \to D$ auch stetig ist und sei f an der Stelle $\bar{x}$ differenzierbar mit $f'(\bar{x}) \neq 0$. Dann ist f^{-1} differenzierbar an der Stelle $\bar{y} := f(\bar{x})$ und es gilt

$$(f^{-1})'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(\bar{x})}.$$

Bemerkung 6.1.8
Es ist wichtig zu merken, dass f' und $(f^{-1})'$ an verschiedenen Stellen ausgewertet werden, resp. $\bar{y} = f(\bar{x})$.

6.2 Wichtige Sätze der Differentialrechnung

6.2.1 Lokale Extremstellen

Definition 6.2.1 (Lokale Extrema)
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Wir sagen, dass eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ein **lokales Maximum** hat bei x_0, wenn es $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Ein **lokales Minimum** und ein **lokaler Minimalwert** von f sind analog definiert. Ausserdem nennen wir x_0 ein *lokales Extremum* von f und $f(x_0)$ einen **lokalen Extremwert** von f, wenn f ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum bei x_0 hat.

Satz 6.2.2 (Ableitung und Extrema)
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Nehmen wir an, f habe ein lokales Extremum bei $x_0 \in D$ und f sei differenzierbar bei x_0. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Damit wissen wir, dass für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I für ein lokales Extremum $x_0 \in I$ eines der folgenden gilt:

1. $x_0 \in I$ ist ein Randpunkt von I (wenn das Intervall nicht offen ist),
2. f ist nicht differenzierbar bei x_0 (spielt in der Anwendung meist keine Rolle) oder
3. f ist differenzierbar bei x_0 und $f'(x_0) = 0$.

Genauer gilt, dass alle lokalen Extrema einer differenzierbaren Funktion auf einem *offenen Intervall* Nullstellen der Ableitung sind. Ist das Intervall nicht offen, so müssen die Randpunkte einzeln betrachtet werden!

6.2.2 Mittelwertsatz

Satz 6.2.3 (Mittelwertsatz)
Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf dem offenen Intervall (a, b). Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$, sodass:
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bemerkung 6.2.4
Der Mittelwertsatz besagt intuitiv, dass für jede Sekante durch unsere Funktion – also eine mittlere Änderungsrate – eine Stelle ξ existiert, an der die Tangente an dieser Stelle parallel zur Sekante ist. Das ist ein recht intuitives Resultat, da es besagt, dass die Änderungsrate sich kontinuierlich ändern muss und nicht einfach springen kann.

Bemerkung 6.2.5 (Mittelwertabschätzung)
Wir finden durch den Mittelwertsatz eine Abschätzung für die Differenz zweier Funktionswerte, wenn die Ableitung f' auf dem Definitionsbereich beschränkt ist.

$$|f(x) - f(y)| =| f'(\xi)(b - a) |\leq \max_{\xi \in (a,b)} \left(|f'(\xi)|\right) |b - a|.$$

Die Beschränktheit der Ableitung benötigen wir nur dafür, dass das Maximum nicht vielleicht unendlich ist. Dann liefert unsere Ungleichung kein sinnvolles Ergebnis. Es ist noch zu bemerken, dass die Beschränktheit der Ableitung auf jeden Fall erfüllt ist, wenn unsere Funktion stetig differenzierbar ist, da f' stetig auf einer kompakten Menge Beschränktheit impliziert nach dem Satz von Weierstrass (5.3.8).

6.3 Regel von Bernoulli-de L'Hospital

Satz 6.3.1 (Bernoulli-de L'Hospital)
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a \in I \cup \{\pm\infty\}$. Es seien $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I \setminus \{a\}$. Gelte eine der folgenden Voraussetzungen:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \lim_{x\to a} |f(x)| = \lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty.$$

Existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad (L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}),$$

so gilt:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Beispiel 6.3.2 (Bernoulli-de L'Hospital)
Berechnen Sie den folgenden Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Lösung: Wir sehen, dass wir den Fall $\frac{0}{0}$ haben. Damit können wir Bernoulli-de L'Hospital anwenden und erhalten

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

Beispiel 6.3.3 (Bernoulli-de L'Hospital)
Berechnen Sie den folgenden Grenzwert für alle $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 0} \left(e^{\alpha x} + x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Lösung: Weil exp() eine stetige Funktionen ist schreiben wir

$$\lim_{x\to 0} \left(e^{\alpha x} + x\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log\left(e^{\alpha x} + x\right)\right).$$

Nun berechnen wir den inneren Grenzwert mithilfe der Regel von Bernoulli-de L'Hospital, wenn $\alpha \neq 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(e^{\alpha x} + x\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha e^{\alpha x} + 1}{e^{\alpha x} + x} = \alpha + 1.$$

Damit folgt für den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \left(e^{\alpha x} + x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\alpha+1}.$$

Wenn $\alpha = 0$ so ist der Ausdruck

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x)}{x}\right).$$

Es folgt wieder mit Bernoulli-de L'Hospital

$$\exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x)}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + x}\right) = e.$$

Dieser Fall ist damit kohärent mit der vorherigen Formel für $\alpha \neq 0$. Das allgemeine Ergebnis ist daher

$$\lim_{x\to 0} \left(e^{\alpha x} + x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\alpha+1} \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 6.3.4 (Bernoulli-de L'Hospital)
Berechnen Sie den Grenzwert mithilfe von Bernoulli-de L'Hospital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \cos(x)\sin(3x)}{\sin^3(x) + 3\sin(x) - x}.$$

Lösung: Wir nutzen die Regel von Bernoulli-de L'Hospital und finden

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \cos(x)\sin(3x)}{\sin^3(x) + 3\sin(x) - x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sin(x)\sin(3x) + 3\cos(x)\cos(3x)}{3\cos(x)\sin^2(x) + 3\cos(x) - 1} = \frac{1+3}{3-1} = 2.$$

6.4 Kurvendiskussion

Im Folgenden werden die zentralen Schritte einer Kurvendiskussion für eine reellwertige, differenzierbare Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kurz zusammengefasst.

6.4.1 Monotonieverhalten

Das Monotonieverhalten einer Funktion wird durch das Vorzeichen der ersten Ableitung $f'(x)$ bestimmt:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Rightarrow f \text{ ist streng monoton steigend,} \\ f'(x) < 0 &\Rightarrow f \text{ ist streng monoton fallend.} \end{aligned}$$

6.4.2 Kritische Punkte

Kritische Punkte sind diejenigen Punkte $\bar{x} \in D$, für die gilt:

$$f'(\bar{x}) = 0.$$

Sie sind Kandidaten für lokale Extremstellen und damit auch globale Maxima/Minima.

6.4.3 Lokale Extremstellen

Ein kritischer Punkt $\bar{x}$ ist eine lokale Extremstelle, wenn das Vorzeichen von $f'(\bar{x})$ in seiner Umgebung wechselt. Welcher Vorzeichenwechsel unterscheidet Maximum und Minimum: $+ \to -$ Maximum, $- \to +$ Minimum. Alternativ kann die zweite Ableitung verwendet werden:

$$\begin{aligned} f''(\bar{x}) > 0 &\Rightarrow \text{lokales Minimum,} \\ f''(\bar{x}) < 0 &\Rightarrow \text{lokales Maximum.} \end{aligned}$$

6.4.4 Globale Extrema

Globale Extrema werden bestimmt, indem man die Werte von f an allen lokalen Extremstellen <u>sowie an den Randpunkten</u> des Definitionsbereichs D vergleicht:

$$f(x_{\min}) = \min_{x\in D} f(x), \qquad f(x_{\max}) = \max_{x\in D} f(x).$$

6.4.5 Krümmungsverhalten

Das Krümmungsverhalten hängt vom Vorzeichen der zweiten Ableitung $f''(x)$ ab:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Rightarrow \text{Graph von } f \text{ ist } \textit{linksgekrümmt} \text{ (konvex),} \\ f''(x) < 0 &\Rightarrow \text{Graph von } f \text{ ist } \textit{rechtsgekrümmt} \text{ (konkav).} \end{aligned}$$

6.4.6 Wendestellen

Wendestellen sind Punkte $\bar{x} \in D$, an denen der Graph von f das Krümmungsverhalten ändert. Damit sind es notwendigerweise Nullstellen der zweiten Ableitung:

$$f''(\bar{x}) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(\bar{x}) \neq 0.$$

Welcher Vorzeichenwechsel vorliegt (resp. ob f''' positiv oder negativ ist) bestimmt was für ein Wendepunkt es ist.

6.5 Optimierung

Beispiel 6.5.1
Eine Firma verkauft Mais in Dosen. Für maximale Wirtschaftlichkeit soll bei gegebenem Volumen V die optimale Dose (Zylinder mit Radius r und Höhe h) gefunden werden, sodass möglichst wenig Verpackungsmaterial gebraucht wird, also insbesondere jene Dose mit minimalem Oberflächeninhalt A gefunden werden. Wie sieht diese Dose aus?

Lösung: Wir wissen, dass für ein konstantes Volumen V die folgende Beziehung zwischen Radius und Höhe gilt

$$V = \pi r^2 h.$$

Diese Beziehung nennt man *Nebenbedingung*. Es ist essentiell zu beachten, dass V eine Konstante ist und r und h Variablen. Wir haben aber so die Möglichkeit eine Funktion $r(h) = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$ oder $h(r) = \frac{V}{\pi r^2}$ zu bilden. Wir suchen nun das globale (!) Minumum des Flächeninhalts A bei einem fixen gegebenen V. Der Flächeninhalt hängt mit dem Radius und der Höhe zusammen via

$$A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Gleichzeitig wissen wir aber auch, wie sich die Höhe mit dem Radius transformiert $h(r)$ oder der Radius mit der Höhe $r(h)$. Eine der beiden Beziehungen können wir einsetzen. Wir entscheiden uns, dass wir $A(r)$ suchen, also die Beziehung $h(r)$ einsetzen. Wir erhalten dann den Oberflächeninhalt als Funktion vom Radius:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Wir haben so den „Freiheitsgrad” h eliminiert, indem wir die Beziehung $h(r)$ eingesetzt haben und so die Höhe in Abhängigkeit vom Radius ausgedrückt haben. Das konnten wir machen, da wir das Volumen V kennen!
Diese Funktion $A(r)$ wollen wir jetzt minimieren auf $[0, \infty)$. Die Randpunkte 0 und „∞” müssen wir nicht betrachten, da in beiden Fällen keine physikalisch realisierbare „Dose” entsteht. Also suchen wir das lokale Minimum auf $(0, \infty)$. Dafür muss notwendigerweise die Ableitung $A'(r)$ verschwinden. Es gilt also

$$A'(r) = 0 \iff 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0.$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$V = 2\pi r^3.$$

Indem wir die Formel für das Volumen einsetzen, erhalten wir die Beziehung zwischen Radius und Höhe als

$$\pi r^2 h = 2\pi r^3 \iff \boxed{h = 2r.}$$

Es gilt ausserdem

$$A''\left(r^3 = \frac{V}{2\pi}\right) > 0.$$

Damit haben wir notwendige (Verschwinden der Ableitung) und hinreichende Bedingung (negative zweite Ableitung) für ein Minimum erfüllt und die gesuchte Dose gefunden!

6.6 Taylorapproximation und die Taylorreihe

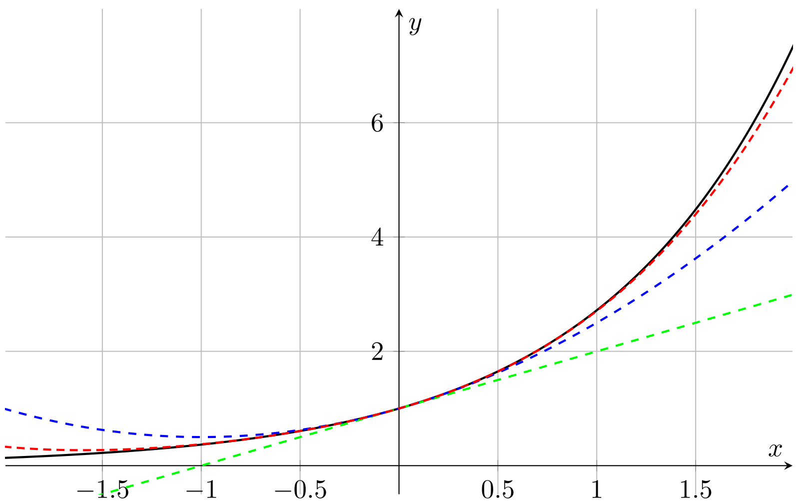
Die Idee der Taylorreihe ist simpel. Wir wissen, dass die Ableitung eine lokale Linearisierung unserer Funktion ist. Wir nähern sie lokal durch eine Gerade mit demselben Anstieg an. Wir möchten aber in unsere lokale Approximation weitere Informationen über die Funktion einbeziehen und diese dadurch verbessern.

Wir konstruieren dafür ein Polynom vom Grad n, was an einer Stelle x_0 dieselben Ableitungen wie unsere Funktion f hat. Ein solches Polynom hat immer die Form

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots}$$

Für $n = 1$ entspricht das damit genau der lokalen linearen Approximation durch die Ableitung. Man kann nachrechnen, dass die Ableitungen von P_n und von f an der Stelle x_0 identisch sind. (Hinweis: Das $n!$ im Nenner kommt aus der Potenzregel beim Ableiten des Polynoms.)

Dieses Polynom vom Grad n hat nun die Informationen von den ersten n-Ableitungen der Funktion f bei x_0 „gespeichert". In den Ableitungen stecken Informationen über die Steigung, Krümmung, usw. der Funktion f. Es ist also im gewissen Art eine Approximation von f um x_0, da noch alle weiteren Informationen über die höheren Ableitungen grösser als n fehlen. Wir nennen ein solches Polynom die **Taylorapproximation** n-ter Ordnung. Der Satz von Taylor besagt nun, dass wenn wir den Grad des Polynoms gegen unendlich gehen lassen $n \to \infty$ und aus dem Taylorpolynom damit eine **Taylorreihe** (spezieller Name dieser Potenzreihe) machen, konvergiert (unter bestimmten Vorraussetzungen) diese Potenzreihe gegen die Funktion f. Funktionen, für welche die Taylorreihe gegen f konvergiert, nennt man **analytisch**. Analytische Funktionen sind zum Beispiel $\sin x, \cos x, e^x, \ldots$



In der Abbildung sehen wir die tatsächliche Exponentialfunktion e^x (schwarz) und drei Taylorapproximationen: Die Taylorapproximation 1. Ordnung (grün), 2. Ordnung (blau) und 4. Ordnung (rot). Je höher der Grad des Polynoms, desto besser die Approximation. Das folgt aus dem Satz von Taylor und aus dem Fakt, dass e^x analytisch ist. Es sei nur am Rande bemerkt, dass es Funktionen gibt, deren Taylorreihe nicht gegen die Funktion konvergiert. Für mehr Informationen siehe A.6.

Satz 6.6.1 (Taylorentwicklung mit klein-o Restterm)
Sei $n \geq 1$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in [a, b]$. Dann ist für alle $x \in [a, b]$

$$f(x) = P_n(x) + o(|x - x_0|^n) \qquad \text{wenn } x \to x_0.$$

Das heisst, der Fehler, den unsere Approximation $P_n(x)$ macht, geht schneller als ein Polynom n-ten Grades gegen Null, wenn $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - P_n(x)|}{|x - x_0|^n} = 0.$$

Beispiel 6.6.2
Finden Sie die Taylorapproximation dritter Ordnung von $\sin(x)$ bei $x_0 = 0$.

Lösung: Dafür berechnen wir den Funktionswert und die ersten drei Ableitungen von $\sin x$ bei 0.

$$\sin(0) = 0 \quad \sin'(0) = 1 \quad \sin''(0) = 0 \quad \sin'''(0) = -1.$$

Wir stellen damit das Taylorpolynom auf als:

$$P_3(x) = 0 + (x - 0)^1 + \underbrace{\frac{0}{2!}(x - 0)^2}_{=0} + \frac{-1}{3!}(x - 0)^3 = x - \frac{x^3}{6}.$$

Bemerkung 6.6.3 (Kleinwinkelapproximation)
Eine schöne Bemerkung ist, dass die Kleinwinkelnäherung in der Physik

$$\sin\theta \approx \theta$$

entspricht genau dem Taylorpolynom ersten (resp. zweiten, da der zweite Term verschwindet) Grades.

Beispiel 6.6.4 (Taylorentwicklung von $\log(1 - x)$)
Wir suchen die Taylorentwicklung von $\log(1 - x)$ ohne dabei alle Ableitungen zu berechnen. Dafür nutzen wir, dass die Taylorentwicklung eindeutig ist. Wir wissen, dass

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Integrieren wir nun beide Seiten (die Potenzreihe dabei definitionsgemäss Termweise), so erhalten wir

$$-\log(1 - x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Es gilt also für die Taylorentwicklung von $\log(1 - x)$

$$\log(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$$

Beispiel 6.6.5 (Grenzwerte mit der Taylorentwicklung)
Wir können Grenzwerte gegen eine Stelle oft einfach ausrechnen, indem wir die Taylorentwicklung (hier ist wichtig, dass die Entwicklungsstelle der Grenzwertstelle entspricht) einsetzen. So zum Beispiel mit diesem Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x(1 - \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^5)}{x(\frac{x^2}{2} + o(x^4))} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{6} + o(x^2)}{\frac{1}{2} + o(x^2)} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}.$$

Was wir hier machen ist im Grunde eine Verallgemeinerung von der Regel von Bernoulli-de L'Hospital.

Beispiel 6.6.6 („Mean Girls" – Limit mittels Taylor)
Wir untersuchen das Grenzverhalten des folgenden Terms:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)-\sin(x)}{1-\cos^2(x)}.$$

Lösung: Mithilfe der Taylorentwicklungen von $\log(1-x)$, $\sin(x)$ und $\cos(x)$ können wir nun nahe der Polstelle das Verhalten des Terms untersuchen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)-\sin(x)}{1-\cos^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^2+o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}{x+o(x^3)} \sim \lim_{x\to 0}\left(\frac{-2}{x}-\frac{1}{2}\right)$$

Damit verhält sich der Term nahe Null wie $\frac{-2}{x}-\frac{1}{2}$. Daran sieht man, dass der links und rechtsseitige Grenzwert verschieden sind und der Grenzwert damit nicht existiert.

Kapitel 7

Das Riemann-Integral und die Differential- und Integralrechnung

In diesem Kapitel definieren wir das Riemann-Integral und Stammfunktionen. Wir lernen ausserdem Integrationsmethoden kennen. Es verbindet die Differential- und die Integralrechnung mittels des Fundamentalsatzes der Analysis.

7.1 Das Riemann-Integral

Für eine Definition des Riemann-Integrals siehe A.7

7.2 Hauptsatz der Analysis

Definition 7.2.1 (Stammfunktion)
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Jede differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $F' = f$ heisst **Stammfunktion** von f.

Bemerkung 7.2.2 (Stammfunktionen und Integrierbarkeit)
Eine Stammfunktion ist im Allgemeinen nicht eindeutig. Eine Funktion kann also mehrere Stammfunktionen haben. Es existieren auch Funktionen, die keine Stammfunktion haben. Es existieren auch Funktionen, die Riemann-integrierbar sind, aber keine Stammfunktionen haben. Ein Beispiel ist die Funktion $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ – sie besitzt keine Stammfunktion, aber ist auf jedem beschränkten Intervall Riemann-integrierbar.

Satz 7.2.3 (Hauptsatz der Analysis)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist für jede Konstante $C \in \mathbb{R}$ die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Ausserdem hat jede Stammfunktion folgende Form mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

Bemerkung 7.2.4
Durch den Hauptsatz können wir nun Funktionen deutlich einfacher Riemann-integrieren. Es folgt nämlich für bestimmte Integrale direkt aus dem Fundamentalsatz

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Man bemerke, dass dieses Resultat unabhängig von der gewählten Stammfunktion ist.

7.3 Integrationsmethoden

7.3.1 Partielle Integration

Satz 7.3.1 (Partielle Integration)
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann ist

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx.$$

Beispiel 7.3.2
Finden Sie eine Stammfunktion von $f(x) = xe^x$ mithilfe von partieller Integration.

Lösung: Wir nutzen partielle Integration und sehen, dass wir x leicht ableiten und e^x leicht integrieren können. Wichtig ist auch zu beachten, dass wir den Term ableiten wollen, der möglichst „verschwindet" oder vereinfacht. Damit folgt

$$\int xe^x\ dx = \frac{1}{2}x^2e^x - \int e^x\ dx = \frac{1}{2}x^2e^x - e^x + C$$

Beispiel 7.3.3
Finden Sie eine Stammfunktion von $\log x$ mithilfe von partieller Integration.
Hinweis: Integrieren Sie $\log(x) \cdot 1$ *partiell.*

Lösung: Wir nutzen den Hinweis und integrieren $\log(x) = \log(x) \cdot 1 = \log(x) \cdot (x)'$ partiell.

$$\int \log(x) \cdot 1\ dx = \int \log(x)(x)'\ dx = x\log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\ dx = x\log(x) - x + C.$$

Beispiel 7.3.4
Finden Sie die Stammfunktion von $\sin^2(x)$ mittels partieller Integration.

Lösung:

$$I = \int \sin^2(x)dx = -\cos(x)\sin(x) + \int \cos^2(x)dx = -\cos(x)\sin(x) + \int 1 - \sin^2(x)dx$$

$$I = -\cos(x)\sin(x) + x - I$$

$$I = \frac{x - \cos(x)\sin(x)}{2}$$

7.3.2 Integration durch Substitution

Satz 7.3.5 (Integration durch Substitution)
Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \to J$ stetig differenzierbar und $g : J \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt für alle $[a, b] \subseteq I$,

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\ dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\ dy.$$

Intuition zur Substitution: Wir haben ein Integral der Art

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\, dx.$$

Nun substituieren wir $f(x)$ mit y. Wenn wir über y integrieren wollen, müssen wir damit also von $f(a)$ nach $f(b)$ integrieren. Wir schreiben die Ableitung f' in Leibnitz-Notation. Dann erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x)dx = dy.$$

Damit folgt die bekannte Formel

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\, dy.$$

Beispiel 7.3.6
Wir möchten das Integral

$$\int_0^a \sin(2x)\, dx$$

für eine beliebige reelle Zahl $a > 0$ berechnen.

Lösung: Durch die Substitution $y = f(x) = 2x$ erhält man $dy = f'(x)\, dx = 2\, dx$, also $dx = \frac{1}{2}\, dy$, und damit:

$$\int_0^a \sin(2x)\, dx = \int_{f(0)}^{f(a)} \sin(t)\frac{1}{2}\, dy = \int_0^{2a} \sin(y)\frac{1}{2}\, dy = \frac{1}{2}\int_0^{2a} \sin(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2}[-\cos(t)]_0^{2a} = \frac{1}{2}((-\cos(2a)) - (-\cos(0))) = \frac{1}{2}(-\cos(2a) + 1) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a)).$$

Beispiel 7.3.7
Wir möchten das Integral

$$\int_0^2 x\cos(x^2 + 1)\, dx.$$

berechnen.

Lösung: Durch die Substitution $y = f(x) = x^2 + 1$ erhält man $dy = 2x\, dx$, also $x\, dx = \frac{1}{2}\, dy$, und damit

$$\int_0^2 x\cos(x^2 + 1)\, dx = \frac{1}{2}\int_1^5 \cos(y)\, dy = \frac{1}{2}(\sin(5) - \sin(1)).$$

Es wird also $x^2 + 1$ durch y ersetzt und $x\, dx$ durch $\frac{1}{2}\, dy$. Die untere Grenze des Integrals $x = 0$ wird dabei in $f(0) = 0^2 + 1 = 1$ umgewandelt und die obere Grenze $x = 2$ in $f(2) = 2^2 + 1 = 5$.

7.4 Symmetrien beim bestimmten Integrieren

Bei der Berechnung bestimmter Integrale über symmetrischen Intervallen $[-a, a]$ können Symmetrieeigenschaften von Funktionen die Rechnung erheblich vereinfachen. Eine Funktion f heisst **ungerade**, wenn für alle x aus ihrem Definitionsbereich gilt: $f(x) = f(-x)$ Für das bestimmte Integral einer ungeraden Funktion über einem symmetrischen Intervall $[-a, a]$ gilt:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Dies liegt daran, dass die Flächeninhalte links und rechts des Ursprungs sich genau aufheben.

Beispiel 7.4.1
Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x) = x^3$ auf dem Intervall $[-2, 2]$.

Lösung: Die Funktion ist ungerade und das Intervall symmetrisch um 0. Damit folgt direkt, dass das Integral verschwindet. Es findet sich auch durch explizite Rechnung:

$$\int_{-2}^{2} x^3 dx = \frac{1}{4}\left[x^4\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{4}\left(2^4 - 2^4\right) = 0.$$

Beispiel 7.4.2
Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x) = \sin(x)$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$.

Lösung: Die Funktion ist ungerade und das Intervall symmetrisch um 0. Damit folgt direkt, dass das Integral verschwindet. Es findet sich auch durch explizite Rechnung:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx = -\left[\cos(x)\right]_{-\pi}^{\pi} = -\left(\cos(\pi) - \cos(-\pi)\right) = 0.$$

Anhang A

Weitere Mathematische Details

A.1 Offene und abgeschlossene Teilmengen

Definition A.1.1 (Offene und abgeschlossene Menge)
Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ heisst **offen** in $\mathbb{R}$, falls für jedes $x \in U$ ein offenes Interval I existiert, sodass $x \in I$ und $I \subseteq U$.
Eine Menge $F \subseteq \mathbb{R}$ heisst **abgeschlossen**, falls sein Komplement $\mathbb{R} \setminus F$ offen ist.

Intuitiv gesprochen bedeutet Offenheit, dass ich für jeden Punkt in meiner Menge, immer noch weitere Punkte in der Menge ganz nah finden kann. Es gibt also keine „Randpunkte".

Bemerkung A.1.2
„Nicht offen" bedeutet nicht direkt „abgeschlossen" und andersrum. Es gibt Mengen, die sind weder offen, noch abgeschlossen. Zum Beispiel halb-offene Intervalle $[0, 1)$.

Bemerkung A.1.3 (Unbeschränkte offene/abgeschlossene Mengen)
Auch die Intervalle $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ sind offen. Für jeden Punkt x gibt es ein kleines offenes Intervall, das vollständig in $(-\infty, 0)$ resp. $(0, \infty)$ enthalten ist. Ähnlich ist zum Beispiel die Menge $[0, \infty)$ abgeschlossen.

Bemerkung A.1.4 (Eigenschaften offener und abgeschlossener Mengen)
Es gelten die folgenden Eigenschaften für offene und abgeschlossene Mengen:

- Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.
- Endliche Schnitte offener Mengen sind offen.
- Beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
- Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

A.2 Komplexe Zahlen

A.2.1 Eulersche Formel

„Herleitung" der Eulerschen Formel (siehe Taylorreihen ??)
Es sei uns die Taylorreihe der Exponentialfunktion e^x gegeben durch

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

Setzen wir in diese Reihenentwicklung eine rein imaginäre Zahl $i \cdot z$ mit $z \in \mathbb{R}$ ein, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} \cdots = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right) = \cos(z) + i\sin(z),
\end{aligned}
$$

wobei wir im letzten Schritt die Taylorreihenentwicklung vom Sinus und Cosinus eingesetzt haben. Diese Umformungen sind mathematisch exakt durchführbar und sind hier zur Nachvollziehbarkeit nur angedeutet.

Bemerkung A.2.1 (Mathematische Intuition hinter der Eulerschen Formel)
Warum ergibt es Sinn, das komplexe Potenzen in Sinus- und Cosinuswellen zerfallen? Denn Potenzen erfüllen die Eigenschaft, dass

$$e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi}.$$

Genau diese Eigenschaft erfüllen auch (und auch ausschliesslich) die Sinus- und Cosinuswellen in der Form, wie sie in der Eulerschen Formel vorkommen. Wir sehen mittels der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus, dass

$$
\begin{aligned}
e^{i(\varphi+\psi)} &:= \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi) \\
&= (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i\,(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) \\
&= \cos\varphi\cos\psi + i\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\sin\psi + i\sin\varphi\cos\psi \\
&= \cos\varphi(\cos\psi + i\sin\psi) + i\sin\varphi(\cos\psi + i\sin\psi) \\
&= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) \\
&=: e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi}.
\end{aligned}
$$

Die Eigenschaft, dass die Exponentialfunktion Multiplikation und Addition verbindet, werden wir im Kapitel über Differentialgleichungen ausführlich benutzen. In den komplexen Zahlen sehen wir diese Eigenschaft, indem ein **Addieren** eines Polarwinkels ψ im Argument einer **Multiplikation** der Zahl mit $e^{i\psi}$ entspricht.

Bemerkung A.2.2 (Trigonometrische Identitäten)
Aus der Eulerschen Formel und der Polardarstellung lassen sich auch alle trigonometrischen Identitäten herleiten. Hier soll einmal der trigonometrische Pythagoras angedeutet werden. Sei $z \neq 0$ eine komplexe Zahl in Polarform. Es gilt $z = |z|e^{i\varphi}$ für einen Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Wir betrachten nun den Betrag von z:

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)|z|(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = |z|\,\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}$$

Daraus können wir also schliessen nach teilen durch $|z|$, dass $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

A.3 Folgen

A.3.1 Beweis des Sandwich-Lemmas

Der Beweis des folgenden Lemmas ist sehr illustrativ einerseits für das Verständnis des Theorems an sich, als auch für die Definition des Grenzwertes und typische Beweise mit dieser.

Satz A.3.1 (Sandwich-Lemma)
Seien $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ Folgen reeller Zahlen, sodass für ein $N \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \geq N$ gelten. Es gelte, dass $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent sind und denselben Grenzwert besitzen. Dann ist auch die Folge $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent, und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Beweis. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$ beliebig. Weil (x_n) und (z_n) gegen einen Grenzwert $\bar{x}$ konvergieren, existieren per Definition zwei Indizes N_x und N_z, sodass

$$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_x \qquad |z_n - \bar{x}| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_z.$$

Gleichzeitig erfüllen die Folgen ab einem Index N die Ungleichung $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \geq N$. Wählen wir $N' = \max\{N, N_x, N_z\}$, so gelten alle drei dieser Ungleichungen für alle $n \geq N'$. Wir wissen damit, dass

$$\bar{x} - \varepsilon \leq x_n \leq y_n \leq z_n \leq \bar{x} + \varepsilon \quad \forall n \geq N'.$$

Damit folgt, dass $|y_n - \bar{x}| < \varepsilon$ für alle $n \geq N'$. Damit konvergiert (y_n) gegen $\bar{x}$.

□

A.4 Reihen

Bemerkung A.4.1 (Potenzreihen sind stetig und insbesondere glatt)
Betrachten wir die Funktionenfolge $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, so konvergiert diese Funktionenfolge innerhalb des Konvergenzradius *gleichmässig* gegen die Potenzreihe. Weil Polynome stetige Funktionen sind, definieren Potenzreihen innnerhalb ihres Konvergenzradius *stetige Funktionen* (siehe 5.2). Genauer sind Potenzreihen sogar glatt resp. unendlich oft differenzierbar, also in C^∞

A.4.1 Partialbruchzerlegung

Haben wir einen Bruch von Polynomen, so wollen wir diesen in sogenannte Partialbrüche zerlegen. Das sieht zum Beispiel wie folgt aus:

$$\frac{2x+3}{x^2-x-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Das allgemeine Vorgehen ist hier einmal an einem Beispiel erklärt:

- Faktorisiere das Nennerpolynom in Linearfaktoren.

  In unserem Beispiel suchen wir also die Linearfaktorzerlegung von $x^2 - x - 2$. Wir finden für die Nullstellen $+2$ und -1. Es folgt die Linearfaktorzerlegung

  $$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

- Stelle den Partialbruchansatz auf.

  Wir stellen nun den Partialbruchansatz auf. Dafür schreiben wir:

  $$\frac{2x+3}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

  für konstante Koeffizienten $A, B \in \mathbb{R}$.

- Kreuzmultiplizieren

  Wir wollen nun mit dem Nennerpolynom multiplizieren. Beachte, dass wir dafür die Linearfaktorzerlegung kennen!

  $$2x+3 = \frac{A}{x-2}(x-2)(x+1) + \frac{B}{x+1}(x-2)(x+1) = A(x+1) + B(x-2)$$

- Koeffizientenvergleich

  Wir wollen nun die Koeffizienten vor den einzelnen Potenzen von x vergleichen. Dafür multiplizieren wir den Ausdruck auf der rechen Seite fertig aus und übertragen die linke Seite mit.

  $$2x + 3 = Ax + A + Bx - 2B = (A + B)x + A - 2B.$$

  Damit folgt per Koeffizientenvergleich, dass $2 = A + B$ und $3 = A - 2B$.

- Lösen des linearen Gleichungssystems

  Nun müssen wir nur noch das lineare Gleichungssystem aus dem Koeffizientenvergleich lösen.

  $$\begin{cases} 2 = A + B \\ 3 = A - 2B \end{cases} \qquad\qquad A = \frac{7}{3} \quad \text{und} \quad B = -\frac{1}{3}.$$

  Damit folgt für unsere Partialbruchzerlegung:

  $$\frac{2x+3}{x^2 - x - 2} = \frac{7/3}{x-2} + \frac{-1/3}{x+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right).$$

A.5 Differenzierbarkeit

Beispiel A.5.1 (Differentialquotient)
Zeigen Sie mithilfe der Definition der Ableitung, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

im Ursprung differenzierbar ist.

Beweis. Wir bilden den Differentialquotienten bei 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

Damit ist die Ableitung $f'(0) = 0$ wohldefiniert und f im Ursprung damit differenzierbar. □

Beispiel A.5.2 (Gegenbeispiel Differentialquotient)
Auf der anderen Seite können wir zeigen, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

im Ursprung zwar stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Beweis. Um die Stetigkeit kurz zu zeigen, müssen wir den Grenzwert gegen Null berechnen.

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

Weil der rechts- und linksseitige Grenzwert mit dem Funktionswert übereinstimmt ist f bei 0 stetig.

Nun berechnen wir den Differentialquotienten:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\sin(x).$$

Dieser Grenzwert ist nicht wohldefiniert. Damit existiert die Ableitung im Ursprung nicht und damit ist f dort nicht differenzierbar. □

A.6 Taylorreihen

A.6.1 Nicht-analytische Funktionen

Es gibt Funktionen, die glatt (d.h. unendlich oft differenzierbar), aber nicht analytisch sind. Das heisst ihre Taylorreihe konvergiert nicht gegen die Funktion. Ein Beispiel ist die Funktion

$$\psi(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ e^{-\frac{1}{x}} & x>0.\end{cases}$$

Diese Funktion ist glatt, also unendlich oft differenzierbar, aber ihre Taylorreihe im Ursprung ist identisch Null, da alle Ableitungen verschwinden! Ebenso ist aus demselben Grund $e^{-\frac{1}{x^2}}$ bei 0 nicht analytisch.

Es gibt auch noch viel pathologischere Beispiele von nicht-analytischen Funktionen. Es gibt sogar Funktionen, die C^∞ sind, aber an keiner Stelle in ihrem Definitionsbereich analytisch sind.

A.7 Definition des Riemann-Integrals

Definition A.7.1 (Riemann-Zerlegung)
Eine **Riemann-Zerlegung** von $[a,b]$ ist eine endliche Menge an Punkten

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

mit $n\in\mathbb{N}$. Die Punkte $x_0,\ldots,x_n$ sind die Stützstellen der Zerlegung.

Definition A.7.2 (Treppenfunktion)
Eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist eine **Treppenfunktion**, falls eine Zerlegung $a=x_0<\cdots<x_n=b$ von $[a,b]$ existiert, sodass für $k=1,2,\ldots,n$ die Einschränkung von f auf das offene Intervall (x_{k-1},x_k) konstant ist.

Definition A.7.3 (Riemann-Integral einer Treppenfunktion)
Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Treppenfunktion bezüglich der Zerlegung $a=x_0<\cdots<x_n=b$ von $[a,b]$. Dann ist das Integral von f auf $[a,b]$ definiert als die reelle Zahl

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}c_k(x_k-x_{k-1}),$$

wobei c_k dem Funktionswert von f auf dem Intervall (x_k,x_{k-1}) entspricht.

Das Integral von Treppenfunktionen hängt **nicht** von der Zerlegung des Intervalls ab. Ausserdem ist es **linear** und **monoton**.

Definition A.7.4 (Ober- und Untersummen)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist die Menge an **Untersummen** $\mathcal{L}(f) \subseteq R$ und **Obersummen** $\mathcal{U}(f) \subseteq R$ von f

$$\mathcal{L}(f) = \left\{ \int_a^b \ell \, dx \;\middle|\; \ell \text{ eine Treppenfunktion und } \ell \leq f \right\}$$

$$\mathcal{U}(f) = \left\{ \int_a^b u \, dx \;\middle|\; u \text{ eine Treppenfunktion und } u \geq f \right\}.$$

Definition A.7.5 (Das Riemann-Integral)
Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst *Riemann-integrierbar*, falls $\sup \mathcal{L}(f) = \inf \mathcal{U}(f)$. In diesem Fall ist dieser gemeinsame Wert das Riemann-Integral von f und ist ausgedrückt durch

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sup \mathcal{L}(f) = \sup \mathcal{U}(f).$$

Bemerkung A.7.6
Auch das Riemann-Integral ist **linear** und **monoton**. Es gilt auch eine Dreiecksungleichung:

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Diese Ungleichung ist für sehr viele Anwendungen und Abschätzungen sehr zentral.

A.8 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Bemerkung A.8.1 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Es existiert auch ein Mittelwertsatz der Integralrechnung, der in den Serien eingeführt worden ist. Demnach existiert für eine stetige Funktion f auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ immer ein Wert $\xi \in [a, b]$, sodass

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Geometrisch interpretiert, existiert immer ein Wert Funktionswert $f(\xi)$, sodass das entstehende Rechteck über $[a, b]$ denselben Flächeninhalt hat, wie das Riemann-Integral unter der Funktion f über $[a, b]$.

Beweis. Weil f stetig ist, nimmt f ein Maximum $M = f(x_M)$ und ein Minimum $m = f(x_m)$ auf $[a, b]$ an. Wir können also abschätzen

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \iff f(x_m) \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq f(x_M).$$

Weil f stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein ξ zwischen x_m und x_M mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx.$$

□